

SYSTEME DIREKT VERBUNDENER KATEGORIEN UND UNIVERSELLE FUNKTOREN

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der
Doktorwürde der Hohen Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Ulrich Oberst aus Berlin

München, August 1964

1965

SYSTEME DIREKT VERBUNDENER KATEGORIEN UND UNIVERSELLE FUNKTOREN

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der
Doktorwürde der Hohen Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Ulrich Oberst aus Berlin

München, August 1964

Berichterstatter: Prof. Dr. F. Kasch

Tag der mündlichen Prüfung: 27. 1. 1965



Einleitung

Kapitel I : Systeme direkt verbundener Kategorien

§1. Bezeichnungen	1
§2. Definition	4
§3. Funktoren auf Systemen direkt verbundener Kategorien	7
§4. Äquivalenzen und Isomorphismen von Systemen direkt verbundener Kategorien	9
§5. Paare direkt verbundener Kategorien	12
§6. Kategorien von Diagrammen	18

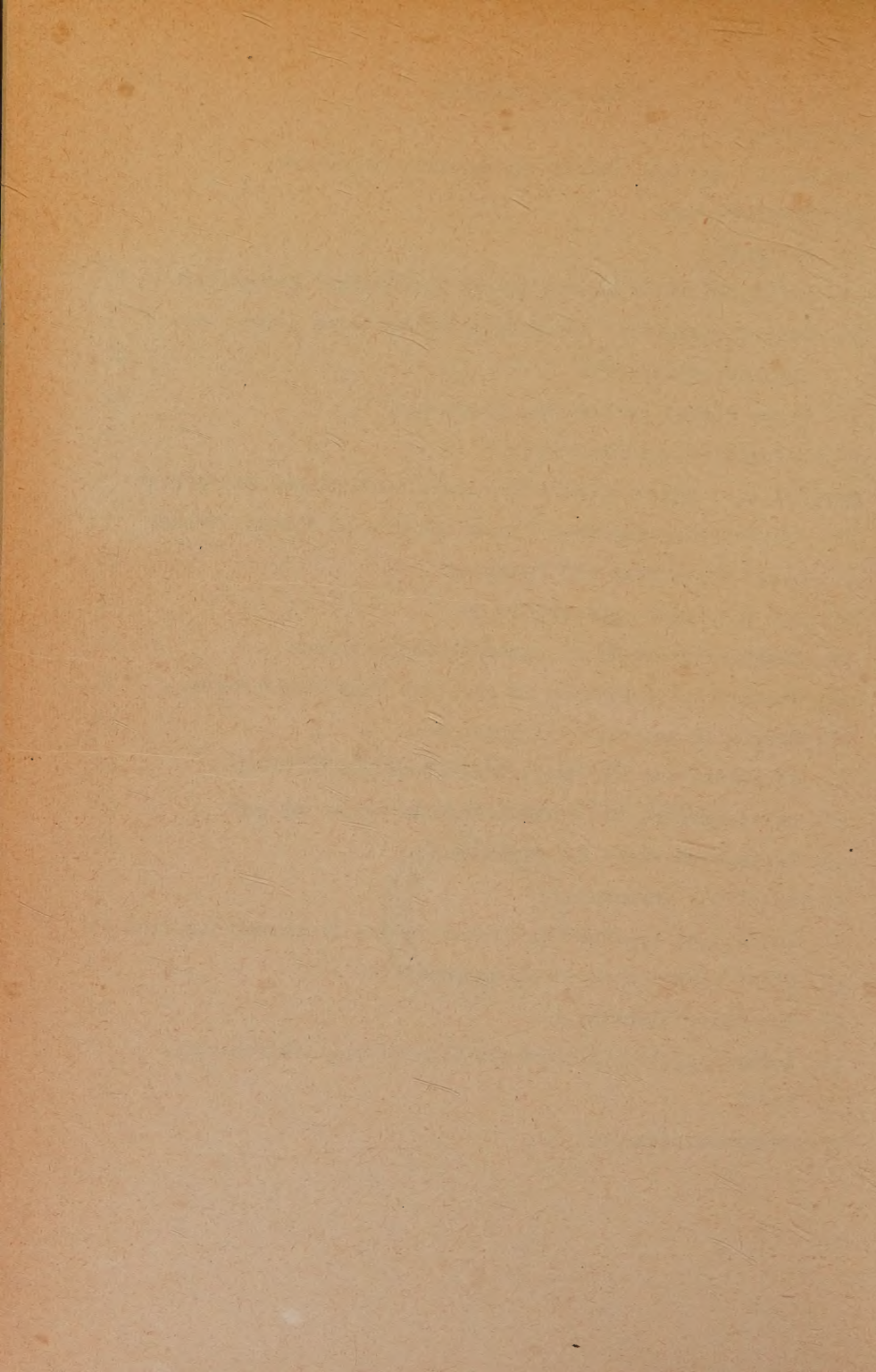
Kapitel II : Paare universell direkt verbundener Kategorien

§1. Zusammenhang zwischen Paaren universell direkt verbundener Kategorien und Funktoren	24
§2. Der kanonische Epimorphismus	31
§3. Exaktheitsverhalten universeller Funktoren	33
§4. Universelle Funktoren im Fall von Funktorkategorien	35
§5. Vergleich universeller Funktoren	39
§6. Existenzsätze für universelle Funktoren	41
§7. Existenzsätze für direkte Limits	51
§8. Vertauschbarkeit von Funktoren	59

Kapitel III : Anwendungen

§1. Äquivalenz von Funktorkategorien und Diagrammkategorien	66
§2. Satelliten und abgeleitete Funktoren	71
§3. Kohomologiefunktoren	81
§4. Äußere Algebra, Differentialalgebra und Differentialmodul	89

Literaturverzeichnis



EINLEITUNG

In dieser Arbeit werden Funktoren mit Hilfe von Systemen, speziell Paaren direkt verbundener Kategorien untersucht. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen dem "problème d'application universelle" von N. Bourbaki [1] und der Theorie der Funktoren hergestellt.

Ein Paar $\mathcal{P}$ direkt verbundener Kategorien (s. auch [5] und [16]) erhält man durch Vorgabe einer Kategorie $\mathcal{A}$, einer Kategorie $\mathcal{B}$ und folgenden Daten:

Zu Objekten A aus $\mathcal{A}$ und B aus $\mathcal{B}$ existieren Mengen $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(A, B)$ ($:=$ Menge der Morphismen von A in B). Zu Objekten A, A' aus $\mathcal{A}$ und B, B' aus $\mathcal{B}$ gibt es Verknüpfungen

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \times \text{Hom}_{\mathcal{P}}(A', B) \ni (a, f) \rightarrow fa \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(A, B)$ und
 $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(A', B) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B') \ni (f, b) \rightarrow bf \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(A', B')$,
 für die das assoziative Gesetz und $1_B f = f 1_{A'}$ gelten.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Kategorien und $\mathcal{A}^*$ die zu $\mathcal{A}$ duale Kategorie, so ist die Kategorie $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ aller Paare $\mathcal{P}$ direkt verbundener Kategorien mit $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \mathcal{B}$ (mit geeigneten Morphismen) äquivalent zur Kategorie $\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \text{Men})$ aller Funktoren von $\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}$ in die Kategorie der Mengen (I, §5). Auf den Objekten wird die Äquivalenz durch die Zuordnung

$\mathcal{P} \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(*, *)$ gegeben. $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(*, *)$ heißt die zu $\mathcal{P}$ gehörige Verbindung.

Ein Paar $\mathcal{P}$ heißt universell direkt verbunden, falls für alle Objekte A aus $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ ein Objekt $r(A)$ aus $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ und ein Morphismus $s(A)$ von A in $r(A)$ so existieren, daß jeder Morphismus f von A in ein Objekt B aus $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ eindeutig in der Gestalt $f = bs(a)$ mit einem Morphismus b aus $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ faktorisiert werden kann. Die volle Unterkategorie $\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ von $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ aller universell direkt verbundenen Paare ist äquivalent zur vollen Unterkategorie $\text{ReprFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \text{Men})$ von $\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \text{Men})$ aller Funktoren

$T(*,*) : \mathcal{A}^* \times \mathcal{L} \rightsquigarrow$ Men derart, daß für alle Objekte A aus der Funktor $T(A,*) : \mathcal{L} \rightsquigarrow$ Men in $\mathcal{B}$ repräsentierbar ist (II, 1). Beide Kategorien sind antiäquivalent zur Kategorie $\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ der Funktoren von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$ (II, 1). Das Bild eines Paares $\mathcal{P}$ aus $\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ bei dieser Antiäquivalenz wird als universeller Funktor von $\mathcal{P}$ bezeichnet. Diese Ergebnisse bilden die Grundlage der Arbeit und umfassen insbesondere die Resultate von Kan [9] über adjungierte Funktoren.

Für gewisse Probleme ist der Begriff des Paares direkt verbundener Kategorien nicht genügend allgemein. Wir führen daher im ersten Kapitel den Begriff des Systems direkt verbundener Kategorien über einer geordneten Indexmenge I ein. Sind $I = \{1\}$ oder $I = \{1, 2\}$, so erhält man die Kategorien selbst bzw. die Paare direkt verbundener Kategorien zurück. Es wird gezeigt, daß sich Systeme direkt verbundener Kategorien ähnlich wie Kategorien behandeln lassen. Insbesondere betrachten wir Funktoren (I, §3) und Äquivalenzen (I, §4) von Systemen direkt verbundener Kategorien. Als Spezialfall erhält man Systeme von Diagrammkategorien (I, §6).

Für Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ untersuchen wir im zweiten Kapitel die Funktoren von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$ auf Grund der Antiäquivalenz von $\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ und $\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ mit Hilfe der zugehörigen Verbindung. Unter anderem ergeben sich einfache Kriterien für das Exaktheitsverhalten (II, §3) und die Vertauschbarkeit (II, §8) von Funktoren. Für das letzte Problem spielen Tripel und Quadrupel direkt verbundener Kategorien eine ausschlaggebende Rolle. Die Vertauschbarkeit von Funktoren wird auf die Frage zurückgeführt, wann das Produkt universeller Funktoren wieder universell bezüglich der "richtigen" Verbindung ist. Speziell werden wieder universelle Funktoren im Zusammenhang

mit Funktorkategorien (Diagrammkategorien) behandelt. Man erhält direkte und dual inverse Limites; einen Sonderfall dieser stellen die sogenannten Kantschen Limites [9] dar.

In §§ 6 und 7 wird die Existenz universeller Funktoren unter geeigneten Voraussetzungen bewiesen. Der Existenzsatz von N. Bourbaki [1] wird für die hier vorliegende Situation verallgemeinert und umformuliert (II, §6). Insbesondere ergeben sich Existenzsätze für adjungierte Funktoren und direkte Limites (II, §7). Die im zweiten Kapitel gewonnenen Resultate lassen sich auf mannigfache Probleme anwenden; z.B. ergeben sich die Existenz, die Funktoreigenschaft, das Exaktheitsverhalten und Vertauschungsrelationen der Funktoren "freies Objekt", Tensorprodukt, Quotientenring- und modul, zugeordnete Garbe von Prägarben, Differentialmodul usw.

Im dritten Kapitel werden einige ausgewählte Anwendungen gegeben. In §1 wird gezeigt, daß jede Kategorie $\mathcal{A}^{(S,R)}$ von Diagrammen über einem Diagrammschema (S,R) (s. [7]) mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{A}$ isomorph ist zur Kategorie der Funktoren von einer funktoriell von (S,R) abhängigen Kategorie $\mathcal{K}(S,R)$ in $\mathcal{A}$.

In §2 definieren wir Satelliten von additiven Funktoren einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ in eine additive Kategorie $\mathcal{B}$ bezüglich einer vollen Unterkategorie $\mathcal{T}$ der Kategorie $\text{Morph } \mathcal{A}$ aller Morphismen von $\mathcal{A}$. In Verallgemeinerung des bisher üblichen braucht die Menge der Objekte von $\mathcal{T}$ nicht aus Monomorphismen zu bestehen. Mit Hilfe der Methoden von D. Buchsbaum [2] beweisen wir einen Existenzsatz für Satelliten. Insbesondere erhält man Rechtssatelliten und rechtsabgeleitete Funktoren, falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Abelsch und die Menge der Objekte von $\mathcal{T}$ die Menge der Morphismen einer injektiven Struktur im Sinne von Maranda [12] auf $\mathcal{A}$ sind.

Die in III, §3 behandelten Kohomologiefunktoren sind spezielle Satelliten, nämlich die Rechtssatelliten von inversen Limites. Wir zeigen, daß sich viele Kohomologietheorien in das hier gegebene Schema einordnen lassen. Sind $\mathcal{A}$ eine Abelsche Kategorie mit exakten direkten Produkten, $\mathcal{Z}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{T} : \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ der (Kansche) inverse Limes, so erhält man die Bilder der Rechtssatelliten (= rechtsabgeleiteten Funktoren) von $\mathcal{A}$ bezüglich der Kategorie $\mathcal{T} := \text{MonMorphFunkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A})$ aller Monomorphismen von $\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A})$ als Homologieobjekte eines positiven Standardkomplexes. Unter anderem bekommt man so die Kohomologie der Gruppen und Monoide.

In § 4 soll an einem bekannten Beispiel gezeigt werden, wie man die in Kapitel II bewiesenen Sätze anwenden kann.

Die Beweise in den ersten beiden Kapiteln ergeben sich in natürlicher Weise aus den hier zu Grunde liegenden Begriffen. Es ist mit ein Ziel dieser Arbeit zu zeigen, daß zahlreiche Ergebnisse aus diesem Gebiet, für die spezielle, zum Teil umständliche und wenig durchsichtige Beweise vorliegen, durch Klärung der Begriffe unmittelbar einleuchtend werden.

KAPITEL I: SYSTEME DIREKT VERBUNDENER KATEGORIEN

§ 1. Bezeichnungen

Wir verwenden die Bezeichnungen von P. Gabriel [6].

Wir setzen voraus, daß zu jeder Menge M ein Universum $\mathcal{U}$ (im Sinne von Grothendieck, s. z. B. [6]) mit $M \in \mathcal{U}$ existiert. Sei $\mathcal{U}$ ein Universum, das gewisse ausgezeichnete Mengen wie die Menge der natürlichen Zahlen und andere in späteren Anwendungsbeispielen benötigte Mengen enthält. $\mathcal{W}$ sei ein Universum mit $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$.

Sei $\mathcal{T}$ eine mathematische Theorie, die stärker ist als die Theorie der Mengen. Sei Struk eine Strukturart in $\mathcal{T}$, welche über m Hauptbasismengen, $m \geq 1$, definiert ist (N. Bourbaki [1], S. 12). Sei $\mathcal{G}$ ein Morphismenterm in $\mathcal{T}$, welcher den Bedingungen (MO I) bis (MO III) von [1], S. 23, genügt, verallgemeinert auf endlich viele Hauptbasismengen.

$\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$ sei dann die folgende Kategorie:

$\mathcal{O}\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$ bestehe aus allen $m+1$ -Tupeln $(M_1, \dots, M_m, S)$ von Mengen $M_i \in \mathcal{U}$, welche sogar Terme in $\mathcal{T}$ sind, $i=1, \dots, m$, und einer Struktur S der Art Struk auf $(M_1, \dots, M_m)$.

$M\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$ sei die Menge aller $\mathcal{G}$ -Morphismen (loc. cit. S. 23) zwischen Elementen von $\mathcal{O}\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$.

Sind $(M_1, \dots, M_m, S)$ und $(N_1, \dots, N_m, T)$ aus $\mathcal{O}\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$, so ist

$\text{Hom}_{\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}}((M_1, \dots, M_m, S), (N_1, \dots, N_m, T)) \subset \prod_{i=1}^m \text{Hom}(M_i, N_i)$, wobei

$\text{Hom}(M_i, N_i)$ die Menge aller Abbildungen von M_i in N_i ist. Die Eigenschaften (MO I) bis (MO III) sichern, daß $\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$ mit der Hintereinausführung von m -Tupeln von Abbildungen als Verknüpfung eine Kategorie ist.

Wir setzen voraus, daß $\mathcal{U}$ insbesondere alle Hilfsbasismengen von Struk enthält. Die Eigenschaften von Universa und Strukturen zeigen dann, daß $(M_1, \dots, M_m, S)$ genau dann Objekt von $\mathcal{U}\text{Struk}^{\mathcal{G}}$ ist, wenn $(M_1, \dots, M_m, S) \in \mathcal{U}$, die M_i Mengen und sogar Terme in $\mathcal{T}$ und S eine

eine Struktur der Art Struk auf $(M_1, \dots, M_n)$ sind. Weiter implizieren die Eigenschaften von $\mathcal{U}$ und Struk , daß sowohl $0\mathcal{U}\text{Struk}$ als auch $M\mathcal{U}\text{Struk}$ Teilmengen von $\mathcal{U}$ sind und daß $\mathcal{U}\text{Struk}$ eine $\mathcal{U}$ -Kategorie ist.

Manchmal schreiben wir nur Struk statt $\mathcal{U}\text{Struk}$. In dem oben präzisierten Sinn seien $\mathcal{U}\text{Men}$, $\mathcal{U}\text{Punkt}$, $\mathcal{U}\text{Ab}$, $\mathcal{U}\text{Mod } K$ usw. die Kategorien der Mengen, punktierten Mengen, Abelschen Gruppen, K -Moduln usw.. In diesen Beispielen sind $\mathcal{T}$ die Theorie der Mengen und die $\mathcal{G}$ -Morphismen die üblichen Homomorphismen.

Seien Struk_1 und Struk_2 Strukturarten in einer Theorie $\mathcal{T}$. Struk_1 sei auf Hauptbasismengen $x_1, \dots, x_n$ definiert, während Struk_2 auf gewissen dieser $x_1, \dots, x_n$, z.B. auf $x_1, \dots, x_r$, $r < n$, definiert sei. Sei D ein Deduktionsprozeß im Sinne von [1], §1,6., der jeder Struktur S_1 der Art Struk_1 auf $(x_1, \dots, x_n)$ eine Struktur der Art Struk_2 auf $(x_1, \dots, x_r)$ zuordnet. Schließlich seien $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Morphismenterme für Struk_1 bzw. Struk_2 .

Der Deduktionsprozeß D induziert jedenfalls eine Abbildung $D_0 : 0\mathcal{U}\text{Struk}_1^{\mathcal{G}_1} \longrightarrow 0\mathcal{U}\text{Struk}_2^{\mathcal{G}_2}$. Ist nun noch für jeden $\mathcal{G}_2$ -Morphismus $(f_1, \dots, f_n)$ ($f_1, \dots, f_r$) ein $\mathcal{G}_2$ -Morphismus, so induziert D sogar einen Funktor $\bar{D} : \mathcal{U}\text{Struk}_1^{\mathcal{G}_1} \rightsquigarrow \mathcal{U}\text{Struk}_2^{\mathcal{G}_2}$, den wir als Deduktionsfunktor oder manchmal auch als Vernachlässigungsfunktor mit D_0 oder V_0 bezeichnen.

Der wichtigste Fall für uns ist der Fall $r=n=1$. Sind in diesem Fall $(M, S_1) \in 0\mathcal{U}\text{Struk}_1^{\mathcal{G}_1}$ und $(M, S_2) = \bar{D}(M, S_1)$, so heißt S_2 die S_1 unterliegende Struktur der Art Struk_2 auf M .

Wir bemerken, daß die folgenden Definitionen und Behauptungen häufig gar nicht oder nur unwesentlich zu modifizieren sind, wenn man anstatt eines Grothendieckschen Universums $\mathcal{U}$ die Klasse $\{x | x=x\}$ aller Mengen nimmt.

Von jetzt ab bedeute der Begriff "Kategorie" entweder eine $\mathcal{U}$ -Kategorie oder eine $\mathcal{M}$ -Kategorie; ob $\mathcal{U}$ - oder $\mathcal{M}$ -Kategorie wird

aus dem Zusammenhang hervorgehen.

Eine $\mathcal{U}$ -Kategorie $\mathcal{O}$ heißt klein, falls $M \in \mathcal{U}$ ist.

Ist f Morphismus einer Kategorie, so bezeichne Qf bzw. Zf Quell- (Anfangs-)objekt bzw. Ziel(End-)objekt von f .

Ist A Objekt einer Kategorie $\mathcal{O}$, so sei $Un(A)$ die geordnete Menge der Unterobjekte von A , d.h. ein ein für alle Mal ausgewähltes Repräsentantensystem der Klassen äquivalenter Monomorphismen i mit $Zi=A$. Ist i ein solcher Monomorphismus, so sei $\underline{i}$ der Reprsant der i enthaltenden Äquivalenzklasse. In vielen wichtigen Fällen ist $Un(A) \in \mathcal{U}$, falls $\mathcal{O}$ eine $\mathcal{U}$ -Kategorie ist. Dual sei $Fac(A)$ die geordnete Menge der Faktorobjekte von A .

Wir rekapitulieren schließlich noch, wie Exaktheit in beliebigen Kategorien definiert ist.

Eine Folge $\ast) A \rightarrow a \xrightarrow{\alpha'} A''$ in $\mathcal{O}$ heißt exakt, falls $\alpha' \circ \alpha = \alpha'' \circ a$ ist und zu jedem $b \in M\mathcal{O}$ mit $a \circ b = 0$ genau ein $c \in M\mathcal{O}$ mit $b = ac$ existiert. Ist $\mathcal{O} = \mathcal{U}Men$, so ist $\ast)$ genau dann exakt, wenn α injektiv ist und $a(A) = \{x \in A' \mid \alpha'(x) = \alpha''(x)\}$ gilt. Ist $\mathcal{O}$ wiederum beliebig, so ist $\ast)$ genau dann exakt, wenn $\alpha' \circ \alpha = \alpha'' \circ a$ und α ein Monomorphismus sind und zu jedem b mit $a \circ b = \alpha'' \circ b$ ein c mit $ac = b$ existiert oder, quivalent, wenn für alle $B \in \mathcal{O}$

$Hom_{\mathcal{O}}(B, A) \rightarrow Hom(B, a) \xrightarrow{Hom(B, \alpha')} Hom_{\mathcal{O}}(B, A'') \xrightarrow{Hom(B, \alpha'')} Hom_{\mathcal{O}}(B, A'')$ exakt ist.

Dual ist die Exaktheit von Folgen $\ast\ast) A' \xrightarrow{\alpha'} A'' \rightarrow a \rightarrow A$ definiert.

Ein covarianter Funktor $T: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}$ heißt links- (rechts-)exakt, falls er jede Folge der Form $\ast)$ ($\ast\ast)$ in $\mathcal{O}$ in eine entsprechende in $\mathcal{L}$ transformiert. Er heißt exakt, falls er links- und rechts-exakt ist.

Wir definieren analog zum Obigen die Exaktheit von Folgen

$0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A''$ ($A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$) in punktierten Kategorien (s. I, § 5).

§ 2. Definition

Sei $\mathcal{U}$ das in § 1 eingeführte Universum.

Definition 2.1:

Ein $\mathcal{U}$ -System $\mathcal{O}$ direkt verbundener Kategorien über I erhält man durch Vorgabe

i.) einer geordneten Menge $I \in \mathcal{U}, \emptyset \neq I$

ii.) einer Familie $(O_i)_{i \in I}$ von Mengen O_i

iii.) von Abbildungen $\text{Hom}_{i,j} : O_i \times O_j \longrightarrow \mathcal{U}\text{Men}$ für $i \leq j$.

iv.) von Abbildungen $v(A,B,C) : \text{Hom}_{i,j}(A,B) \times \text{Hom}_{j,k}(B,C) \longrightarrow \text{Hom}_{i,k}(A,C)$

für $i \leq j \leq k, A \in O_i, B \in O_j, C \in O_k$ derart, daß die folgenden Axiome

1.) bis 3.) erfüllt sind:

1.) Ist $i \neq j$, so ist $O_i \cap O_j = \emptyset$; ist $(i,j,A,B) \neq (i',j',A',B')$ mit $i \leq j$,

$A \in O_i, B \in O_j$ usw., so ist $\text{Hom}_{i,j}(A,B) \cap \text{Hom}_{i',j'}(A',B') = \emptyset$

2.) Assoziativität: Für $i \leq j \leq k \leq l, A \in O_i, B \in O_j, C \in O_k, D \in O_l$ ist

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{i,j}(A,B) \times \text{Hom}_{j,k}(B,C) \times \text{Hom}_{k,l}(C,D) & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Hom}_{i,j}(A,B)} \times v(B,C,D)} & \text{Hom}_{i,j}(A,B) \times \text{Hom}_{j,l}(B,D) \\ \downarrow v(A,B,C) \times \text{id}_{\text{Hom}_{k,l}(C,D)} & & \downarrow v(A,B,D) \\ \text{Hom}_{i,k}(A,C) \times \text{Hom}_{k,l}(C,D) & \xrightarrow{v(A,C,D)} & \text{Hom}_{i,l}(A,D) \end{array}$$

kommutativ.

3.) Für alle $k \in I$ und $A \in O_k$ existiert ein Element

$1_A \in \text{Hom}_{k,k}(A,A)$ derart, daß für alle $i \leq j, B \in O_i, C \in O_j$ und

$f \in \text{Hom}_{i,j}(B,C)$ $v(B,B,C)(1_B, f) = v(B,C,C)(f, 1_C) = f$ gilt.

Bezeichnungen und Bemerkungen 2.2:

1.) $O\mathcal{O} := \bigcup_{i \in I} O_i$ heißt Menge der Objekte von $\mathcal{O}$.

$M\mathcal{O} := \bigcup_{i,j \in I} \bigcup_{\substack{A \in O_i \\ B \in O_j}} \text{Hom}_{i,j}(A,B)$ heißt Menge der Morphismen von $\mathcal{O}$.

Wir setzen für $i \leq j, A \in O_i, B \in O_j$ $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(A,B) := \text{Hom}_{(i,j)}(A,B) :=$

$\text{Hom}_{i,j}(A,B)$. Die Schreibweise $f: A \rightarrow B$ sei gleichbedeutend mit

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A,B)$. Sind $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Morphismen, so sei

$gf := v(A,B,C)(f,g)$.

Quelle Qf und Ziel Zf eines Morphismus seien wie in § 1 definiert

2.) Für alle $i \in I$ bildet die Menge O_i zusammen mit den Abbildungen Hom_{α_i} und v eine $\mathcal{U}$ -Kategorie, welche mit α_i bezeichnet wird. Die Vorgabe von $\mathcal{O}$ ist also gleichbedeutend mit der Vorgabe einer Familie $(\alpha_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{U}$ -Kategorien α_i und von Mengen $\text{Hom}_{\alpha_i}(\alpha_i, \alpha_j)(A, B) \in \mathcal{U}$, $i \leq j$, $A \in O\alpha_i$, $B \in O\alpha_j$, "verbindender" Morphismen derart, daß die Axiome 1.) 2.) 3.) erfüllt sind. Aus diesem Grunde bezeichnen wir als $\mathcal{O}$ -System direkt verbundener Kategorien und schreiben auch, nicht ganz vollständig, aber kurz, $\mathcal{O} = (\alpha_i)_{i \in I}$. Ist I die geordnete Menge aller natürlichen Zahlen (aller natürlichen Zahlen bis zu einer natürlichen Zahl n), so heißt $(\alpha_i)_{i \in I}$ auch $\mathcal{U}$ -Folge ($\mathcal{U}$ - n -Tupel) direkt verbundener Kategorien. Im Fall $n=2$ sprechen wir auch von $\mathcal{U}$ -Paaren direkt verbundener Kategorien; die Systeme zu $I = \{1\}$ identifizieren wir mit den Kategorien.

3.) Sind $\mathcal{O} = (\alpha_i)_{i \in I}$ ein $\mathcal{U}$ -System direkt verbundener Kategorien, $i \leq j$, $A \in O\alpha_i$ und $B \in O\alpha_j$, so seien $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\cdot, B)$ bzw. $\text{Hom}_{\alpha_i}(A, \cdot)$ die Teilmengen von $M\mathcal{O}$ aller Morphismen f mit $Zf=B$ bzw. $Qf=A$; $\text{Hom}_{\alpha_i}^*(\cdot, B)$ bzw. $\text{Hom}_{\alpha_i}^*(A, \cdot)$ bedeute die Teilmenge von $\text{Hom}_{\alpha_i}(\cdot, B)$ bzw. $\text{Hom}_{\alpha_i}(A, \cdot)$ aller f mit $Qf \in O\alpha_i$ bzw. $Zf \in O\alpha_i$. Wir präordnen $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\cdot, B)$ und analog die übrigen eben definierten Mengen durch die Festsetzung $f \leq g$, falls ein h mit $f=gh$ existiert. Zu $(f, g) \in M\mathcal{O} \times M\mathcal{O}$ sei wie üblich die Abbildung $\text{Hom}(f, g): \text{Hom}_{\mathcal{O}}(Zf, Qg) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(Qf, Zg)$ definiert, falls alle auftretenden Bildungen definiert sind.

$f \in M\mathcal{O}$ mit $Qf \in O\alpha_i$ heißt Monomorphismus ($\mathcal{O}$ -Monomorphismus), falls für alle $B \in O\alpha_i$ (für alle $k \leq i$ und $B \in O\alpha_k$) $\text{Hom}(B, f):= \text{Hom}(1_B, f)$ injektiv ist. Dual (s.u.) wird der Begriff des Epimorphismus ($\mathcal{O}$ -Epimorphismus) definiert.

4.) Ist I eine geordnete Menge aus $\mathcal{U}$ und I^* die mit der dualen Ordnung versehene Menge, so nennen wir ein $\mathcal{U}$ -System $(\alpha_i)_{i \in I^*}$ direkt verbundener Kategorien über I^* auch $\mathcal{U}$ -System invers ver-

bundener Kategorien über I . Die Aussagen " $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ist invers verbunden" und " $(\mathcal{O}_i)_{i \in I^*}$ ist direkt verbunden" werden synonym benutzt.

Zu jedem $\mathcal{U}$ -System $\mathcal{O}$ direkt verbundener Kategorien über I erhält man durch formale "Umkehrung der Pfeile" das invers verbundene System $\mathcal{O}^*$ über I . Ebenso erhält man durch "Umkehrung der Pfeile" zu jeder Aussage a eine duale a^* . Es ist $(\mathcal{O}^*)^* = \mathcal{O}$ und $(a^*)^* = a$. Wir formulieren im folgenden von zwei zueinander dualen Aussagen grundsätzlich nur eine.

5. Häufig sind in Anwendungsbeispielen Familien $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ von Mengen und Abbildungen H, η_i und γ gegeben, für die die Axiome 2.) und 3.) von 2. nicht über das erste Axiom von 2.1 erfüllt sind.

Durch eine geeignete Umbenennung läßt sich aber immer erreichen, daß die gegebenen Daten auch dem Axiom 1.) genügen. Wir werden diese Umbenennung der Kürze wegen in konkreten Fällen nicht explizit ausführen, sie uns aber nötigerfalls vorgenommen denken.

Ist z.B. $\mathcal{L}$ eine $\mathcal{U}$ -Kategorie und I eine geordnete Menge aus $\mathcal{U}$, so erhalten wir bei obiger Vereinbarung durch die Festsetzungen $\mathcal{O}_i = \mathcal{L}$ für alle $i \in I$, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j} = \text{Hom}_{\mathcal{L}}$ ein $\mathcal{U}$ -System direkter verbundener Kategorien, welches wir mit $(\mathcal{L})_{i \in I}$ bezeichnen.

6. Die Menge der Objekte eines $\mathcal{U}$ -Systems direkter verbundener Kategorien $\mathcal{O}$ ist äquipotent zur Menge der Identitäten von $M(\mathcal{O})$, d.h. $|O(\mathcal{O})| = |\{1_A \mid A \in O(\mathcal{O})\}|$. Da $\{1_A \mid A \in O(\mathcal{O})\} \subset M(\mathcal{O}) \subset \mathcal{W}$ gilt, folgt $\{1_A \mid A \in O(\mathcal{O})\} \in \mathcal{W}$. Es bedeutet also keine Einschränkung, $O(\mathcal{O}) \in \mathcal{W}$ anzunehmen.

Im folgenden sei daher für alle $\mathcal{U}$ -Kategorien $\mathcal{O}$ $O(\mathcal{O}) \in \mathcal{W}$.

7. Sei $\Lambda \in \mathcal{U}$ und $(\mathcal{O}^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von $\mathcal{U}$ -Systemen direkter verbundener Kategorien, $\mathcal{O}^\Lambda = (\mathcal{O}_{i_\lambda}^\lambda)_{i_\lambda \in I_\lambda}$, $I_\lambda \in \mathcal{U}$.

Sei I das Produkt der Familie $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in der Kategorie der geordneten Mengen, d.h. sei $I = \prod_{\lambda} I_\lambda$ das mengentheoretische Produkt der

I_λ , versehen mit der Ordnung $i=(i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \leq j=(j_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, falls $i_\lambda \leq j_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Wir definieren dann ein $\mathcal{U}$ -System $\mathcal{O}=(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ direkt verbundener Kategorien über I durch folgende Festsetzungen:

Für $i=(i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in I$ sei $0 \mathcal{O}_i := \prod_{\lambda \in \Lambda} 0 \mathcal{O}_{i_\lambda}^\lambda$. Sind $i=(i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \leq j=(j_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $A=(A_\lambda^\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in 0 \mathcal{O}_i$ und $B=(B_\lambda^\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in 0 \mathcal{O}_j$, so sei $\text{Hom}_{(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j)}(A, B) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_{(\mathcal{O}_{i_\lambda}^\lambda, \mathcal{O}_{j_\lambda}^\lambda)}(A_\lambda^\lambda, B_\lambda^\lambda)$. Die Verknüpfungen seien komponentenweise definiert.

$\mathcal{O}$ heißt direktes Produkt der Familie $(\mathcal{O}_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und wird mit $\mathcal{O} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_i^\lambda$ bezeichnet.

Sind $\mathcal{O}=(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ein $\mathcal{U}$ -System direkt verbundener Kategorien über I und fassen wir $\mathcal{O}^*$ als System direkt verbundener Kategorien über I^* auf, $\mathcal{O}^*=(\mathcal{O}_j^*)_{j \in I^*}$, so sei dann $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}$ das volle Untersystem von $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}$ über der Indexmenge

$$J := \{(j, i) \in I^* \times I \mid j \leq i \text{ in } I\}.$$

Sind $\mathcal{O}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, und $\mathcal{O}$ Kategorien, so heißen $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $\mathcal{O}$ direkt verbunden, falls dies für $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ und $\mathcal{O}$ gilt.

§ 3. Funktoren auf Systemen direkt verbundener Kategorien

Seien $\mathcal{O}=(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ und $\mathcal{L}=(\mathcal{L}_j)_{j \in J}$ $\mathcal{U}$ -Systeme direkt verbundener Kategorien.

Definition 3.1 :

Ein kovarianter Funktor T von $\mathcal{O}$ in $\mathcal{L}$ ist ein Tripel $T=(\varepsilon_T, T_0, T_M)$ einer ordnungstreuen Abbildung $\varepsilon_T : I \rightarrow J$, einer Abbildung $T_0 : 0 \mathcal{O} \rightarrow 0 \mathcal{L}$ mit $T(0 \mathcal{O}_i) \leq 0 \mathcal{L}_{\varepsilon_T(i)}$ und einer Abbildung $T_M : M \mathcal{O} \rightarrow M \mathcal{L}$ mit $QT_M a = T_0 Q a, ZT_M a = T_0 Z a$ für $a \in M \mathcal{O}$, so daß die üblichen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Die Schreibweise $S : \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ bedeute, daß S ein Funktor von $\mathcal{O}$ in $\mathcal{L}$ ist. Sind A und A' aus $0 \mathcal{O}$ und $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, A')$ definiert, so wird die Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, A') \ni a \rightarrow T_M a \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(T_0 A, T_0 A')$ mit $T(A, A')$ bezeichnet.

Sind S und T covariante Funktoren von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$, so ist ein funktorieller Morphismus von S in T eine Familie $b = (b(A))_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}}$ von Morphismen $b(A) \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA, TA)$, $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$, mit $b(Za)Sa = Tab(Qa)$ für alle $a \in \text{Mor } \mathcal{A}$.

Gibt es einen funktoriellen Morphismus von S in T , so folgt daraus insbesondere $\varepsilon_S \leq \varepsilon_T$, d.h. $\varepsilon_S(i) \leq \varepsilon_T(i)$ für alle $i \in I$. Ist dieser ein Isomorphismus, so resultiert $\varepsilon_S = \varepsilon_T$.

Ist z.B. $(\alpha_i)_{i \in I}$ ein $\mathcal{M}$ -System, so sind die kanonischen Injektionen $\alpha_i \hookrightarrow (\alpha_i)_{i \in I}$ Funktoren. Sind zusätzlich $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ ein Funktor, so identifizieren wir S und $\text{Inj}_{\alpha_i: (\alpha_i)_{i \in I}} S$, d.h. setzen $\text{Inj}_{\alpha_i: (\alpha_i)_{i \in I}} S = S$.

Wie definieren die $\mathcal{N}$ -Kategorie $\text{Syst Kat } \mathcal{M}$:

$\text{OSyst Kat } \mathcal{M}$ sei die Menge aller $\mathcal{M}$ -Systeme $\mathcal{A}$ direkt verbundene Kategorien. Wir bemerken dazu, daß nach der in 2.2, 6) getroffenen Festsetzung $0\mathcal{A} \in \mathcal{N}$ gilt.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ zwei solche Systeme, so sei $\text{Hom}_{\text{Syst Kat } \mathcal{M}}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ die Menge aller covarianten Funktoren von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$.

Die Verknüpfung sei die Hintereinanderausführung.

Ist $(\mathcal{A}^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\Lambda \in \mathcal{M}$, eine Familie von $\mathcal{M}$ -Systemen direkt verbundener Kategorien, so ist $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}^\lambda$ das direkte Produkt der $\mathcal{A}^\lambda$ in $\text{Syst Kat } \mathcal{M}$. Mit $\text{Kat } \mathcal{M}$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\text{Syst Kat } \mathcal{M}$ aller $\mathcal{M}$ -Kategorien $\mathcal{A}$ (mit $0\mathcal{A} \in \mathcal{N}$).

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L} \in \mathcal{M}$ -Systeme direkt verbundener Kategorien, so erhalten wir die $\mathcal{N}$ -Kategorie $\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ auf folgende Weise:

$\text{OFunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}) := \text{Hom}_{\text{Syst Kat } \mathcal{M}}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$. Für covariante Funktoren S und T von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$ sei $\text{Hom}_{\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})}(S, T)$ die Menge aller funktoriellen Morphismen von S in T . Die Verknüpfung sei komponentenweise definiert.

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathcal{M}$ -Systeme direkt verbundener Kategorien und $S: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}, T: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ covariante Funktoren, so induziert

$\text{Hom}(S, T) : \text{Hom}_{\text{Syst Kat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Syst Kat}}(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ einen covarianten Funktor $\text{Funkt}(S, T)$ von $\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ in $\text{Funkt}(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, definiert durch $\text{Funkt}(S, T)_O := \text{Hom}(S, T)$ und $\text{Funkt}(S, T)_M ((b(A)_{A \in \mathcal{O}\mathcal{A}}) := (Tb(SA'))_{A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}'}$. Sind hier $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ und $S = \text{id}_{\mathcal{A}}$, so bezeichnet man den Funktor $T_{\mathcal{O}} := \text{Funkt}(\text{id}_{\mathcal{A}}, T)$ auch als Fortsetzung des Funktors T ("lifted functor" in Kan[9]).

Als kontravariante Funktoren von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ bezeichnen wir die covarianten Funktoren von $\mathcal{A}^*$ in $\mathcal{B}$. Im folgenden bedeute der Begriff "Funktor" immer einen covarianten Funktor.

Sind $(\mathcal{A}^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von $\mathcal{V}$ -Systemen direkt verbundener Kategorien und $\mathcal{B}$ ein solches System, so werden die Funktoren aus $\text{Funkt}(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}^\lambda, \mathcal{B})$ auch als Funktoren in $|\Lambda|$ Variablen bezeichnet. Statt $\text{Funkt}(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}^\lambda, \mathcal{B})$ schreiben wir auch $\text{Funkt}((\mathcal{A}^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \mathcal{B})$.

Für jedes System $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(*, *)$ ein Funktor von $\mathcal{A}^* \times \mathcal{A}$ in $\mathcal{V}$ Men.

Sind $\Lambda' \subset \Lambda$ und $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda - \Lambda'} \in \mathcal{O} \prod_{\lambda \in \Lambda - \Lambda'} \mathcal{A}^\lambda$, so erhält man einen Funktor $\prod_{\lambda \in \Lambda'} \mathcal{A}^\lambda \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}^\lambda$ durch die Festsetzung $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} \xrightarrow{\sim} (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} \xrightarrow{\sim} (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $a_\lambda := 1_{A_\lambda}$ für $\lambda \in \Lambda - \Lambda'$; diesen Funktor bezeichnen wir mit $\text{Inj}_{(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda - \Lambda'}}$.

Insbesondere interessiert der Fall $\Lambda - \Lambda' = \{\lambda_0\}$. Ist

$F \in \mathcal{O} \text{Funkt}((\mathcal{A}^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \mathcal{B})$, so heißt der Funktor

$\text{Funkt}(\text{Inj}_{(A_\lambda)_{\lambda \neq \lambda_0}}, \mathcal{B})(F) = F \text{Inj}_{(A_\lambda)_{\lambda \neq \lambda_0}}$ der von F und $(A_\lambda)_{\lambda \neq \lambda_0}$ induzierte Funktor und wird auch mit $F(*, (A_\lambda)_{\lambda \neq \lambda_0})$ bezeichnet.

§ 4. Äquivalenzen und Isomorphismen von $\mathcal{V}$ -Systemen direkt verbundener Kategorien

Definition 4.1:

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ $\mathcal{V}$ -Systeme direkt verbundener Kategorien, so heißt ein Funktor $S: \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ Isomorphie, falls S eine Isomorphie in

Syst Kat $\mathcal{M}$ ist.

Seien z.B. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^\wedge, \lambda \in \wedge, \mathcal{M}$ -Systeme direkt verbundener Kategorien und $P^\wedge: \prod_{\lambda \in \wedge} \mathcal{A}^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^\wedge$ die Projektionen. Dann induziert die bijektive Abbildung $\text{Hom}(\mathcal{A}, \prod_{\lambda \in \wedge} \mathcal{A}^\wedge) \ni T \longrightarrow (P^\wedge T)_{\lambda \in \wedge} \in \prod_{\lambda \in \wedge} \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^\wedge)$ die Isomorphie $(\text{Funkt}(\mathcal{A}, F^\wedge))_{\lambda \in \wedge}: \text{Funkt}(\mathcal{A}, \prod_{\lambda \in \wedge} \mathcal{A}^\wedge) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \wedge} \text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^\wedge)$.

Definition 4.2 (s. auch [6]):

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Systeme direkt verbundener Kategorien.

Eine Äquivalenz von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist ein Quadrupel (S, T, σ, τ) von Funktoren $S: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ und $T: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ und funktoriellen Isomorphismen $\sigma: \text{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \sigma S$ und $\tau: \text{id}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \tau T$ derart, daß für alle $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ $S\sigma(A) = \tau(SA)$ gilt, d.h. $\text{Funkt}(\mathcal{A}, S)(\sigma) = \text{Funkt}(S, \mathcal{B})(\tau): S \rightarrow \text{STS}$.

Folgerungen 4.3:

Sei (S, T, σ, τ) eine Äquivalenz von $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ und $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_j)_{j \in J}$.

1. Nach Definition der funktoriellen Isomorphismen gilt $\sigma_i \sigma_j = \text{id}_{\mathcal{A}_i}$ und $\sigma_j \sigma_i = \text{id}_{\mathcal{A}_j}$, d.h. I und J sind isomorph als geordnete Mengen.

2. Es gilt auch $\text{Funkt}(\mathcal{B}, T)(\tau) = \text{Funkt}(T, \mathcal{A})(\sigma)$. Zunächst folgt nämlich aus $S\sigma(A) = \tau(SA)$ $T\tau(SA) = TS\sigma(A) = \sigma(TSA)$. Aus dem kommutativen Diagramm $B \xrightarrow{\tau(B)} STB \xrightarrow{\sigma(TB)} TSTB$ $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$, folgt das

$$\begin{array}{ccc} \tau(B) \downarrow & & \downarrow ST\tau(B) \\ STB & \xrightarrow{\tau(STB)} & STSTB \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{kommutative Diagramm} & TB & \xrightarrow{T\tau(B)} & TSTB & \\ & T\tau(B) \downarrow & & \downarrow TST\tau(B) & \\ & TSTB & \xrightarrow[\sigma(TSTB)]{T\tau(STB)} & TSTSTB & \end{array}$$

Das Diagramm ist aber offenbar auch kommutativ, wenn in der oberen Zeile $\sigma(TB)$ steht, da σ funktoriell ist. Also ist $T\tau(B) = \sigma(TB)$, q.e.d.

3. Die Relation "Es gibt eine Äquivalenz (S, T, σ, τ) von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ " ist eine Äquivalenzrelation in $\text{OSyst Kat } \mathcal{M}$. Das folgt unmittelbar aus Folgerung 4.3, 2). Wir nennen eine Eigenschaft eines Systems $\mathcal{A}$ direkt verbundener Kategorien kategorisch, wenn sie bei Äquivalenzen erhalten bleibt; kurz: Äquivalente Systeme haben gleiche kategorische Eigenschaften.

Behauptung 4.4:

Seien $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ und $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ Systeme direkt verbundener Kategorien. Sei $S: \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ ein Funktor mit $\varepsilon_S = \text{id}_{\mathcal{I}}$.

Dann sind äquivalent:

- i.) Es gibt einen Funktor $T: \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{O}$ und funktorielle Isomorphismen $\mathcal{G}: \text{id}_{\mathcal{O}} \rightarrow TS$ und $\mathcal{T}: \text{id}_{\mathcal{L}} \rightarrow ST$ derart, daß $(S, T, \mathcal{G}, \mathcal{T})$ eine Äquivalenz von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{L}$ ist.
- ii.) Es gibt einen Funktor $T: \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{O}$ und funktorielle Isomorphismen $\mathcal{G}: \text{id}_{\mathcal{O}} \rightarrow TS$ und $\mathcal{T}: \text{id}_{\mathcal{L}} \rightarrow ST$.
- iii.) Für alle $B \in \mathcal{O}$ existiert ein $A \in \mathcal{O}$ mit $SA = B$ und für alle $i \leq j, A \in \mathcal{O}_i, B \in \mathcal{O}_j$ ist die Abbildung $S(A, B)$ bijektiv.

Beweis:

Die Implikationen i.) $\supset$ ii.) und ii.) $\supset$ iii.) sind trivial. Wir bemerken, daß immer $\varepsilon_T = \text{id}_{\mathcal{I}}$ gilt. Wir beweisen schließlich die Implikation iii.) $\supset$ i.).

Zu jedem $B \in \mathcal{O}$ wählen wir mit Hilfe des Auswahlaxioms ein $A_B \in \mathcal{O}$ und einen Isomorphismus $\tau(B): B \rightarrow SA_B$. Nach Voraussetzung iii.) ist dies möglich. Weiter definieren wir dann $TB := A_B$ für alle $B \in \mathcal{O}$ und für $b \in M_{\mathcal{L}} Tb = S(A_{Qb}, A_{Ab})^{-1} (\tau(Zb) b \tau(Qb))^{-1}$. Tb ist ein Element aus $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(TQb, TZb)$. Offenbar ist T damit ein Funktor von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{O}$, und es gilt $\varepsilon_T = \text{id}_{\mathcal{I}}$.

Außerdem ist $\mathcal{T}(B): B \rightarrow STB = SA_B$ ein funktorieller Isomorphismus. Schließlich sei für $A \in \mathcal{O}$ $\mathcal{G}(A) = S(A, A_{SA})^{-1} (\tau(SA)) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, A_{SA}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, TSA)$. $(\mathcal{G}(A))_{A \in \mathcal{O}}: \text{id}_{\mathcal{O}} \rightarrow TS$ ist dann ebenfalls ein funktorieller Isomorphismus.

Es gilt für $A \in \mathcal{O}$ $S\mathcal{G}(A) = S(A, A_{SA}) (\mathcal{G}(A)) = S(A, A_{SA}) S(A, A_{SA})^{-1} (\tau(SA)) = \tau(SA)$, q.e.d..

Auf Grund von 4.3, 1) bedeutet es in 4.4 keine wesentliche Einschränkung, von vornherein anzunehmen, daß $\mathcal{O}$ und $\mathcal{L}$ Systeme über der gleichen Menge I sind.

§ 5. Paare direkt verbundener Kategorien

Die Paare direkt verbundener Kategorien spielen bei der Formulierung des universellen Faktorisierungsproblems eine hervorragende Rolle ([5] und [16]).

Ein solches Paar $\mathcal{P}$ erhält man durch Vorgabe einer Kategorie $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ einer Kategorie $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, für jedes Paar $(A, B) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \times \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(A, B) \in \mathcal{U}$ und Verknüpfungen der Morphismen derart, daß Axiome 1.) bis 3.) der Definition 2.1 erfüllt sind.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, so sei $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ folgende Kategorie: $\text{Overb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bestehe aus allen $\mathcal{U}$ -Paaren $\mathcal{P}$ direkt verbundener Kategorien mit $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \mathcal{B}$. Sind $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ zwei solche Paare so sei $\text{Hom}_{\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ die Menge aller Funktoren X von $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}'$ mit $\varepsilon_X = \text{id}_{\{1, 2\}}$ und $X|_{\mathcal{A}} = \text{id}_{\mathcal{A}}$, $X|_{\mathcal{B}} = \text{id}_{\mathcal{B}}$. Die Verknüpfung sei die Hintereinanderausführung von Funktoren.

$\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist eine $\mathcal{M}$ -Kategorie.

Zu jedem $\mathcal{P} \in \text{Overb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ induziert der Funktor

$\text{Hom}_{\mathcal{P}}(*, *): \mathcal{P}^* \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}\text{Men}$ einen Funktor von $\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}$ in $\mathcal{U}\text{Men}$, den

wir wieder mit $\text{Hom}_{\mathcal{P}}$ bezeichnen. Jeder Funktor $X: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ aus

$\text{MVerb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gibt Anlaß zu einem funktoriellen Morphismus

$\varphi_X: \text{Hom}_{\mathcal{P}}(*, *) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}'}(*, *)$ durch die Festsetzung $\varphi_X(A, B) = X(A, B)$.

Einer Anregung von P. Gabriel verdanke ich die folgende

Behauptung 5.1:

Die Zuordnung

$\text{Overb}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ni \mathcal{P} \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(*, *) \in \mathcal{O}\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$

$\text{MVerb}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ni X \rightsquigarrow \varphi_X \in \mathcal{M}\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$ ist ein Funktor

und definiert eine Äquivalenz der Kategorien $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und

$\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$.

Beweis:

Die Zuordnung stellt offenbar einen Funktor dar, den wir mit

$\mathcal{F}$ bezeichnen. Wir geben einen Umkehrfunktorkomplex $\mathcal{P}$ an:

Ist $T \in \text{OFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$, so definieren wir $\mathcal{P}T$ durch $\text{Hom}_{\mathcal{P}T}(A, B) := T(A, B)$ und die folgenden Verknüpfungen: Sind $a \in M\mathcal{A}$, $b \in M\mathcal{B}$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}T}(Za, Qb)$, so sei $fa = T(a, Qb)(f)$ und $bf = T(Za, b)(f)$.

Für $\mathcal{P}T$ sind die Axiome von 2.1 bis u.U. auf das erste erfüllt; durch Umbenennung läßt sich nach 2.2, 5) auch dieses erfüllen.

Ist $\varphi \in \text{MFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{L}, \mathcal{U}\text{Men})$, so erhält man

$\mathcal{P}\varphi \in \text{Hom}_{\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(\mathcal{P}Q\varphi, \mathcal{P}Z\varphi)$ durch die Festsetzung $\mathcal{P}\varphi|_{\mathcal{A}} = \text{id}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{P}\varphi|_{\mathcal{B}} = \text{id}_{\mathcal{B}}$ und für $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Q\varphi}(A, B)$, $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$, $B \in \mathcal{O}\mathcal{B}$, $(\mathcal{P}\varphi)f = \varphi(A, B)(f)$.

Damit wird die Zuordnung

$\text{OFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{L}, \mathcal{U}\text{Men}) \ni T \rightsquigarrow \mathcal{P}T \in \text{OVerb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$\text{MFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{L}, \mathcal{U}\text{Men}) \ni \varphi \rightsquigarrow \mathcal{P}\varphi \in \text{MVerb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein covarianter Funktor, und es ist klar, daß $\mathcal{P}\mathcal{F} = \text{id}_{\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ und $\mathcal{F}\mathcal{P} = \text{id}_{\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{L}, \mathcal{U}\text{Men})}$ gelten.

Ein Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ direkt verbundener Kategorien wird also vollständig durch $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und den Funktor $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(*, *): \mathcal{A}^* \times \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{U}\text{Men}$ charakterisiert. Wir nennen $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(*, *)$ auch kurz die Verbindung von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Spezialfälle 5.2:

1.) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien und $E: \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ ein Funktor.

Wir definieren Paare $(\mathcal{A}, \mathcal{B})^E$ ($(\mathcal{B}, \mathcal{A})^E$) direkt verbundener Kategorien durch die Verbindungen

$\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})^E}(*, *):= \text{Hom}_{\mathcal{B}}(E*, *): \mathcal{A}^* \times \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{U}\text{Men}$

$(\text{Hom}_{(\mathcal{B}, \mathcal{A})^E}(*, *):= \text{Hom}_{\mathcal{B}}(*, E*): \mathcal{B}^* \times \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{U}\text{Men}$). Diese Verbindungen

heißen die kanonischen zum Funktor E . Sie spielen später im Zusammenhang mit adjungierten Funktoren eine Rolle. Mit diesen

Definitionen wird $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ auf kanonische Weise ein Tripel direkt verbundener Kategorien.

Sind $A \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ und $B \in \mathcal{O}\mathcal{L}$, so heißen die Elemente von $\text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})^E}(A, B)$ bzw. $\text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})^E}(B, A)$ auch E -Morphismen. Ist f Element von $\text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})^E}(A, B)$ bzw. $\text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})^E}(B, A)$, so bezeichnen wir f mit f_E , wenn wir es als Element von $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(EA, B)$ bzw. $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(B, EA)$ betrachten; umgekehrt, ist f aus $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(EA, B)$ bzw. $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(B, EA)$, so bezeichnen wir es mit f^E , falls es als Element von $\text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})^E}(A, B)$ bzw. $\text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})^E}(B, A)$ aufgefaßt werden soll. Es ist dann $f = (f^E)_E$ und $f^E = (f_E)^E$.

Sind E und E' Funktoren von $\mathcal{O}$ in $\mathcal{L}$ und $e: E \rightarrow E'$ ein funktorieller Morphismus, so ist $\text{Hom}(*, e(*)): \text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, E*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, E'*)$ ein funktorieller Morphismus. Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \text{OFunkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L}) &\ni E \rightsquigarrow \text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})^E}(*, *) = \text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, E*) \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}^* \times \mathcal{O}, \mathcal{L}) \\ \text{MFunkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L}) &\ni e \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, e(*)) \in \text{MFunkt}(\mathcal{L}^* \times \mathcal{O}, \mathcal{O} \text{ Men}) \end{aligned}$$

ist damit ein covarianter Funktor; er induziert einen covarianten Funktor $I_{\alpha_{\mathcal{L}}}$ von $\text{Funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ in $\text{Verb}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$.

Entsprechend erhält man einen contravarianten Funktor $I'_{\alpha_{\mathcal{L}}}$ von $\text{Funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ in $\text{Verb}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$, der auf den Objekten durch $I'_{\alpha_{\mathcal{L}}} E := (\mathcal{O}, \mathcal{L})^E$ definiert ist.

2.) Die vorige Definition verallgemeinert sich sofort in folgender Weise. Seien I eine geordnete Menge aus $\mathcal{U}$ und

$(\mathcal{O}_i, E_{j,i}, j, i \in I, j < i)$ ein inverses System über I in der Kategorie $\text{Kat } \mathcal{U}, E_{j,i}: \mathcal{O}_i \rightsquigarrow \mathcal{O}_j$.

Verbindet man für $j < i$ $(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j)$ mit der kanonischen Verbindung zum Funktor $E_{j,i}$, so wird $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ein $\mathcal{U}$ -System direkt verbundener Kategorien über I .

Seien z.B. I wie oben und $(R_i, \varphi_{j,i}, i, j \in I, j < i)$ ein direktes System über I in $\mathcal{U} \text{ Rin}, \varphi_{j,i}: R_i \rightarrow R_j$. Für alle R_i seien

$\mathcal{O}_i := \mathcal{U} \text{ Mod } R_i$ und für $j < i$ $E_{j,i} := \varphi_{j,i}^*: \mathcal{U} \text{ Mod } R_i \rightsquigarrow \mathcal{U} \text{ Mod } R_j$ der Funktor "direktes Bild". Dann sind $(\mathcal{U} \text{ Mod } R_i, \varphi_{j,i}^*, j < i)$ ein inverses System in $\text{Kat } \mathcal{U}$ und schließlich $(\mathcal{U} \text{ Mod } R_i)_{i \in I}$ ein $\mathcal{U}$ -System direkt verbundener Kategorien.

3.) Seien nun $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ und $(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ Paare direkt verbundener Kategorien und sei die Verbindung von $(\mathcal{A}, \mathcal{L})((\mathcal{L}, \mathcal{I}))$ die kanonische zu einem Funktor $E: \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{I}$ ($E: \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{I}$). Dann wird $(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ein Tripel direkt verbundener Kategorien durch die Festsetzung $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{I})}(*, *) := \text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{I})}(E*, *)$ ($\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{I})}(*, *) := \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}(*, E*)$) und die natürliche Festsetzung der Verknüpfungen.

4.) Beispiele

a) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{L}$ und $E: \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ die Inklusion. Sei $(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien. Mit der induzierten Verbindung ist auch $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ direkt verbunden.

b) Seien $(\mathcal{L}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von $\mathcal{M}$ -Kategorien, $\mathcal{L} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}_\lambda$ und $(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien.

In Abhängigkeit von $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $\in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}_\lambda$, $\lambda_0 \in \Lambda$, wird $(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ein Tripel direkt verbundener Kategorien vermöge des Funktors $\text{Inj}_{(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}: \mathcal{L}_{\lambda_0} \rightsquigarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}_\lambda$. Diese Verbindung von $(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \mathcal{I})$ heißt die von $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ induzierte Verbindung.

5.) Analog zu 1.) definiert man kanonische Verbindungen zu Funktoren in zwei und noch mehr Variablen.

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{I}$ Kategorien und $E: \mathcal{L}^* \times \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Wir definieren das Paar $(\mathcal{A} \times \mathcal{L}, \mathcal{I})^E$ durch die Verbindung

$$\text{Hom}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{L}, \mathcal{I})^E}((A, B), C) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, E(B, C)).$$

Wiederum erhalten wir dadurch einen Funktor $\text{I}_{\mathcal{A} \times \mathcal{L}, \mathcal{I}}$ von $\text{Funkt}(\mathcal{L}^* \times \mathcal{I}, \mathcal{A})$ in $\text{Funkt}((\mathcal{A} \times \mathcal{L})^* \times \mathcal{I}, \mathcal{U} \text{Men}) \cong \text{Verb}(\mathcal{A} \times \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Die von $(\mathcal{A} \times \mathcal{L}, \mathcal{I})$ auf $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ zu $B \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ induzierte Verbindung stimmt mit der kanonischen Verbindung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$ zum Funktor $E(B, *): \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ überein.

Wir definieren schließlich relative Verbindungen in Analogie zu Kan[9].

Seien $\mathcal{T}$ eine Kategorie und $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}Men$ ein Funktor. Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien mit dem Funktor $Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(*, *): (\mathcal{A}, \mathcal{B})^* \times (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{U}Men$.

Definition 5.3:

- i.) Ein Hom-Funktor von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ in $\mathcal{T}$ relativ zu F ist ein Funktor $Q: (\mathcal{A}, \mathcal{B})^* \times (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{T}$ zusammen mit einem funktoriellen Isomorphismus $q: FQ \rightarrow Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(*, *)$.
- ii.) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ heißt F -Paar direkt verbundener Kategorien bezüglich (Q, q) , falls Q ein Hom-Funktor von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ in $\mathcal{T}$ relativ zu F und $q: FQ \rightarrow Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(*, *)$ ein funktorieller Isomorphismus sind.

Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ F -Paar direkt verbundener Kategorien bezüglich (Q, q) so induzieren Q und q insbesondere auch Hom-Funktoren $Q|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}$ bzw. $Q|_{\mathcal{B}}: \mathcal{B}^* \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{T}$ relativ zu F .

Spezialfälle 5.4:

- 1.) Seien $Struk$ eine Strukturart mit einer Hauptbasismenge und ζ ein Term, der die Morphismen von $Struk$ charakterisiert (s. § 1). $F: \mathcal{U}Struk \rightarrow \mathcal{U}Men$ sei der Vernachlässigungsfunktor. Jedes F -Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ direkt verbundener Kategorien bezeichnen wir auch als $\mathcal{U}Struk^{\zeta}$ -Paar.

Modulo einiger trivialer Identifikationen ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ also genau dann ein $\mathcal{U}Struk^{\zeta}$ -Paar direkt verbundener Kategorien, wenn $Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ sogar in $0 \mathcal{U}Struk^{\zeta}$ abbildet und die Verknüpfungen $Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^* \times Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \rightarrow Hom_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ Bi- ζ -Morphismen sind.

- 2.) Wir werden uns hier auf die Fälle $\mathcal{T} = \mathcal{U}Punkt$ und $\mathcal{T} = \mathcal{U}Mod$ (K ein kommutativer Ring mit 1) beschränken.

Statt $\mathcal{U}Punkt$ -bzw. $\mathcal{U}Mod$ K -Paar sagen wir auch punktiertes bzw. K -additives Paar; statt $\mathbb{Z}$ -additiv sagt man nur additiv (üblich ist hier die Bezeichnung präadditiv). Jedes K -additive Paar betrachten wir auch als punktiert mit der unterliegenden Verbindung. Ist $k: K \rightarrow K'$ ein Ringhomomorphismus, so ist jedes K' -additive

Paar auch K -additiv mit der von k induzierten Struktur. Insbesondere ist jedes K -additive Paar auch additiv. Im folgenden benutzen wir den Term "additiv" sowohl für " Z -additiv" als auch für " K -additiv". K sei dabei stillschweigend mitdefiniert.

Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt punktiert(additiv), falls das Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ dies ist. Ohne Einschränkung nehmen wir in diesen Fällen die Existenz eines Objektes 0 in $\mathcal{A}$ mit $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(0, 0) = \{0\}$ an.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ punktierte (K -additive) Kategorien und $T \in \text{OFunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, so heißt T punktiert(K -additiv), falls für alle $A, A' \in \mathcal{A}$ $T(A, A')$ Morphismus in $\mathcal{U}\text{Punkt}(\mathcal{U}\text{Mod } K)$ ist.

Sind $\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, und $\mathcal{B}$ Kategorien, so heißt ein Funktor T aus $\text{OFunkt}((\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \mathcal{B})$ speziell, falls für alle $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(A_\lambda)_{\lambda + \lambda_0}$ aus $\prod_{\lambda + \lambda_0} \mathcal{A}_\lambda$ aus der Punktierttheit(Additivität) von $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ und $\mathcal{B}$ diejenige des von T induzierten Funktors $T(*, (A_\lambda)_{\lambda + \lambda_0}): \mathcal{A}_{\lambda_0} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ folgt.

Die volle Unterkategorie von $\text{Funkt}((\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \mathcal{B})$ aller speziellen Funktoren wird mit $\text{funkt}((\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \mathcal{B})$ bezeichnet. Sind z.B. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ additiv, so muß man die beiden Kategorien $\text{funkt}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$ und $\text{funkt}((\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{C})$ unterscheiden.

Sind $\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, und $\mathcal{B}$ Kategorien und $(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener K , so heißt die Verbindung speziell, falls für alle $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(A_\lambda)_{\lambda + \lambda_0} \in \prod_{\lambda + \lambda_0} \mathcal{A}_\lambda$ aus der Punktierttheit(Additivität) von $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ und $\mathcal{B}$ auch diejenige des mit der induzierten Verbindung zu $(A_\lambda)_{\lambda + \lambda_0}$ versehenen Paares $(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{B})$ folgt.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ punktiert(additiv), so induziert die Äquivalenz von $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$ offenbar eine Äquivalenz der vollen Unterkategorie von $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ aller punktierten(additiven) Paare und der Kategorie $\text{funkt}((\mathcal{A}^*, \mathcal{B}), \mathcal{U}\text{Punkt})$ ($\text{funkt}((\mathcal{A}^*, \mathcal{B}), \mathcal{U}\text{Mod } K)$).

Wir nennen ein Paar direkt verbundener Kategorien $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein

Paar direkt verbundener Kategorien von Mengen mit Struktur, falls

Folgendes gilt :

Es gibt Strukturarten $\text{Struk}_{\mathcal{O}}$ und $\text{Struk}_{\mathcal{L}}$, definiert auf $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ bzw. $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ Hauptbasismengen und Morphismenterme $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ bzw. $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ derart, daß $\mathcal{O} = \mathcal{U}\text{Struk}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{L} = \mathcal{U}\text{Struk}_{\mathcal{L}}$ und

i.) Für $A = (A_1, \dots, A_{m_{\mathcal{O}}}, S) \in \mathcal{O}\mathcal{U}\text{Struk}_{\mathcal{O}}$ und

$B = (B_1, \dots, B_{m_{\mathcal{L}}}, T) \in \mathcal{O}\mathcal{U}\text{Struk}_{\mathcal{L}}$ ist $\text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(A, B)$ Teilmenge von $\text{Hom}_{\mathcal{U}\text{Men}}(A_1 \times \dots \times A_{m_{\mathcal{O}}}, B_1 \times \dots \times B_{m_{\mathcal{L}}})$ und

ii. Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung von Abbildungen, gelten.

Das ist genau die in [1], §3 gegebene Definition.

6. Kategorien von Diagrammen

Wichtige Systeme direkt verbundener Kategorien erhält man mit Hilfe von Diagrammkategorien (A. Grothendieck [7]). Wir werden in III, §1. zeigen, daß jede Diagrammkategorie kanonisch isomorph zu einer Funktorkategorie ist und deshalb jetzt nur diese näher untersuchen.

Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ zwei kleine $\mathcal{U}$ -Kategorien, $\Gamma \subset \mathcal{M}\mathcal{I}$ und $X: \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{J}$ ein Funktor. Sei $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ ein $\mathcal{U}$ -Paar direkt verbundener Kategorien. Dann wird $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O}), \text{Funkt}(\mathcal{J}, \mathcal{L}))$ auf folgende kanonische, von X und Γ abhängige Weise ein $\mathcal{U}$ -Paar direkt verbundener Kategorien:

Sind $F: \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{O}$ und $G: \mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ Funktoren, so sei

$$\text{Hom}_{(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O}), \text{Funkt}(\mathcal{J}, \mathcal{L}))}(F, G) := \left\{ (f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(FC, GX_C) \mid f(Z_Y)F_Y = (GX_Y)f(Q_Y) \text{ für alle } Y \in \mathcal{I} \right\}.$$

Sind $F, F' \in \mathcal{O}\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O})$, $G, G' \in \mathcal{O}\text{Funkt}(\mathcal{J}, \mathcal{L})$, $a = (a(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}(F, F')$, $f = (f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}(F', G)$ und $b = (b(D))_{D \in \mathcal{O}\mathcal{J}} \in \text{Hom}(G, G')$ so seien die Verknüpfungen definiert durch

$$fa := (f(C)a(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \text{ und } bf := (b(XC)f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}}$$

Das entstehende direkt verbundene Paar bezeichnen wir mit

$(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{D}, \mathcal{B}))^{(X, \Gamma)}$. Es ist auf natürliche Weise wieder punktiert (additiv), falls $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dies ist.

Statt $\text{Hom}_{(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{D}, \mathcal{B}))^{(X, \Gamma)}}(F, G)$ schreiben wir meistens $\text{Hom}_{(X, \Gamma)}(F, G)$ oder auch nur $\text{Hom}_{\Gamma}(F, G)$. Wir nennen die oben eingeführte Verbindung die kanonische Fortsetzung der Verbindung von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

zu (X, Γ) . Entsprechend erhalten wir Paare $(\text{funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}), \text{funkt}(\mathcal{D}, \mathcal{B}))^{(X, \Gamma)}$ usw. Ist $\mathcal{V}$ die Kategorie mit nur einem Morphismus und ist $X: \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ der triviale Funktor, so sei $(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}), \mathcal{L})^{\Gamma} = (\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{D}, \mathcal{B}))^{(X, \Gamma)}$

In Verallgemeinerung des Vorangehenden seien $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ein $\mathcal{V}$ -System direkt verbundener Kategorien über $I \in \mathcal{V}$ und $(\mathcal{L}_i, X_i)_{i \in I}$ ein direktes System von kleinen Kategorien $\mathcal{L}_i$ in $\text{Kat } \mathcal{V}$. Seien $\Gamma_i \subset M\mathcal{L}_i$ und $X_{i,j}: (\Gamma_j) \subset \Gamma_i$ für $j \leq i$. Dann wird $(\text{Funkt}(\mathcal{L}_i, \mathcal{A}_i))_{i \in I}$ ein $\mathcal{V}$ -System direkt verbundener Kategorien über I , wobei die einzelnen Teilpaare $(\text{Funkt}(\mathcal{L}_j, \mathcal{A}_j), \text{Funkt}(\mathcal{L}_i, \mathcal{A}_i))$ kanonisch zu $(X_{i,j}, \Gamma_j)$ verbunden sind. Insbesondere interessiert der Fall $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} = (\mathcal{A})_{i \in I}$, $\mathcal{A}$ eine Kategorie.

Ein wichtiger Spezialfall der vorigen Definition ist der folgende: Seien $I \in \mathcal{V}$ eine Menge, $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ eine Familie von kleinen $\mathcal{V}$ -Kategorien und $\Gamma_i \subset M\mathcal{L}_i$ für $i \in I$. Wir betrachten die Potenzmenge $\text{Pot } I$ von I als bezüglich $\supseteq$ (nicht $\subseteq$) geordnete Menge.

Für $J \in \text{Pot } I$ seien $\mathcal{L}_J = \prod_{j \in J} \mathcal{L}_j$, $\Gamma_J = \prod_{j \in J} \Gamma_j$ und für $K \supseteq J$ $P_{JK}: \mathcal{L}_K \rightsquigarrow \mathcal{L}_J$ die Projektion. Dann ist $(\mathcal{L}_J, P_{JK} \Gamma_K)_{J \in \text{Pot } I}$ ein direktes System in $\text{Kat } \mathcal{V}$, und es gilt $P_{JK} \Gamma_K = \Gamma_J$. Wir erhalten so das $\mathcal{V}$ -System $(\text{Funkt}(\mathcal{L}_J, \mathcal{A}_J))_{J \in \text{Pot } I}$. Im Fall $J = \emptyset$ sei $\mathcal{L}_{\emptyset}$ die Kategorie mit nur einem Morphismus. Wir identifizieren $\mathcal{A}_{\emptyset}$ mit $\text{Funkt}(\mathcal{L}_{\emptyset}, \mathcal{A}_{\emptyset})$. Speziell interessiert wieder der Fall

$$(\mathcal{A}_J)_{J \in \text{Pot } I} = (\mathcal{A})_{J \in \text{Pot } I}$$

Im folgenden Teil dieses Abschnitts seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{D}$ kleine $\mathcal{V}$ -Kategorien mit $\Gamma \subset M\mathcal{L}$, $\Delta \subset M\mathcal{D}$ und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{V}$ -Kategorie.

Wir betrachten die direkt verbundenen Paare

- i) $(\text{Funkt}(\mathcal{I} \times \mathcal{V}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A}))$
- ii) $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A})), \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A}))$ und
- iii) $(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})), \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A}))$.

Die Verbindung von i), ii) bzw. iii) sei dabei die kanonische Fortsetzung der Verbindung des Paares $(\mathcal{A}, \mathcal{A})(i)$, $(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A}))(ii)$ bzw. $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \mathcal{A})(iii)$ zu $(\text{Proj}_{\mathcal{I} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}}, \mathcal{I} \times \mathcal{M}^{\mathcal{V}})(i)$, $(\text{Proj}_{\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}}, \mathcal{I})(ii)$ bzw. $(\text{Id}_{\mathcal{V}}, \mathcal{M}^{\mathcal{V}})$.

Behauptung 6.1:

Die $\mathcal{V}$ -Paare i), ii) und iii) sind isomorph.

Beweis:

Wir beweisen die Isomorphie von i) und ii); die von i) und iii) ergibt sich analog. Wir geben zwei zueinander inverse Funktoren $S: i) \rightsquigarrow ii)$ und $T: ii) \rightsquigarrow i)$ an.

S sei wie folgt definiert:

$$S|_{\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A})} = \text{Id}_{\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A})}$$

Ist $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I} \times \mathcal{V}, \mathcal{A})$, so sei für $C \in \mathcal{O}\mathcal{I}$ $(SF)C := F(C, *) \in \text{OFunkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, d.h. für $D \in \mathcal{O}\mathcal{V}$ bzw. $d \in \mathcal{M}^{\mathcal{V}}$ seien

$$((SF)C)D := F(C, D) \text{ bzw. } ((SF)C)d := F(C, d), \text{ und entsprechend für } c \in \mathcal{M}^{\mathcal{I}} \quad (SF)c := (F(c, D))_{D \in \mathcal{O}\mathcal{V}}$$

Ist $a = (a(C, D))_{(C, D) \in \mathcal{O}\mathcal{I} \times \mathcal{V}} \in \text{Hom}_{\text{Funkt}(\mathcal{I} \times \mathcal{V}, \mathcal{A})}(F, F')$, so sei $Sa := (Sa(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}(SF, SF')$ durch $(Sa)(C) := a(C, *) \in$

$\text{Hom}_{\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A})}((SF)C, (SF')C)$ definiert, wobei

$$(Sa)(C) = a(C, *) : (SF)C = F(C, *) \longrightarrow (SF')C = F'(C, *) \text{ gilt, d.h. für alle } D \in \mathcal{O}\mathcal{V} \text{ sei } (Sa)(C)(D) = a(C, D) : (SF)C D \longrightarrow ((SF')C)D.$$

Schließlich sei für $f = (f(C, D))_{(C, D) \in \mathcal{O}\mathcal{I} \times \mathcal{V}} \in \text{Hom}(F, G)$, $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I} \times \mathcal{V}, \mathcal{A})$, $G \in \text{OFunkt}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ $Sf := (Sf(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} = (f(C, *))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}}$, $f(C, *) \in \text{Hom}((SF)C, G) = \text{Hom}(F(C, *), G)$.

Eine kleine Rechnung zeigt, daß $S: i) \rightsquigarrow ii)$ tatsächlich ein Funktor ist. Den Umkehrfunktorktor T zu S erhält man, indem man die

obigen Gleichungen mutatis mutandis von rechts nach links liest.
Es gilt dann $TS=id$ und $ST=id$, q.e.d..

Folgerung 6.2:

Seien $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m$ kleine $\mathcal{M}$ -Kategorien und $\Gamma \subset M \mathcal{I}_i$.

Dann sind die mit den kanonischen Verbindungen zu $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$ versehenen $m+1$ -Tupel

$(\text{Funkt}(\mathcal{I}_1 \times \dots \times \mathcal{I}_m, \mathcal{O}), \text{Funkt}(\mathcal{I}_1 \times \dots \times \mathcal{I}_m, \mathcal{O}), \dots, \text{Funkt}(\mathcal{I}_m, \mathcal{O}), \mathcal{O})$ und
 $(\text{Funkt}(\mathcal{I}_1, \text{Funkt}(\mathcal{I}_2, \dots, \text{Funkt}(\mathcal{I}_m, \mathcal{O}) \dots)), \text{Funkt}(\mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{O}) \dots),$
 $\dots, \text{Funkt}(\mathcal{I}_m, \mathcal{O}), \mathcal{O})$ kanonisch isomorph.

Der Beweis folgt aus 6.1 durch Induktion.

Wir erwähnen hier einen Spezialfall des Funktors $\text{Funkt}(S, T)$ (s. §3) der später benötigt wird. Seien $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien, $S: \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie mit $\Gamma \subset M \mathcal{I}$. Den fortgesetzten Funktor $\text{Funkt}(\mathcal{I}, S)$ bezeichnen wir auch mit $S_{\mathcal{I}}$ (s. §3).

Sei nun $s: id_{\mathcal{A}} \rightarrow S$ ein funktorieller Morphismus (Hierbei identifizieren wir $id_{\mathcal{A}}$ bzw. S mit $\text{Inj}_{\mathcal{A}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ bzw. $\text{Inj}_{\mathcal{A}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot S}$). Für alle $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ist $\text{Funkt}(F, (\mathcal{A}, \mathcal{B}))(s) = (s(FC))_{C \in \mathcal{O} \mathcal{I}}$:
 $\text{Funkt}(F, (\mathcal{A}, \mathcal{B}))(id_{\mathcal{A}}) = F \rightarrow \text{Funkt}(F, (\mathcal{A}, \mathcal{B}))S = SF = \text{Funkt}(\mathcal{I}, S)F$
ein funktorieller Morphismus. Setzen wir dann

$s_{\mathcal{I}} := (\text{Funkt}(F, (\mathcal{A}, \mathcal{B}))(s))_{F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})} = ((s(FC))_{C \in \mathcal{O} \mathcal{I}})_{F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}$,
so ist $s_{\mathcal{I}}: id_{\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})} \rightarrow S_{\mathcal{I}}$ ein funktorieller Morphismus (im gleichen Sinne wie s). $s_{\mathcal{I}}$ heißt Fortsetzung von s .

Zum Schluß untersuchen wir noch, wann die contravarianten Funktoren $\text{Hom}_{\Gamma}(*, A): \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{M}en, A \in \mathcal{O} \mathcal{A}$, linksexakt sind. Für alle $D \in \mathcal{O} \mathcal{I}$ ist die Zuordnung

$\text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \ni F \rightsquigarrow FD \in \mathcal{O} \mathcal{A}$,

$\text{MFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \ni (a(C))_{C \in \mathcal{O} \mathcal{I}} \rightsquigarrow a(D) \in M \mathcal{A}$ ein

covarianter Funktor von $\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ in $\mathcal{A}$, den wir mit $\widehat{D}$ bezeichnen.

Behauptung 6.3:

Die Funktoren $\hat{C}, C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$, seien rechtsexakt. Dann gelten:

i.) Die Menge der Funktoren $\hat{C}, C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$, ist treu rechtsexakt, d.h.

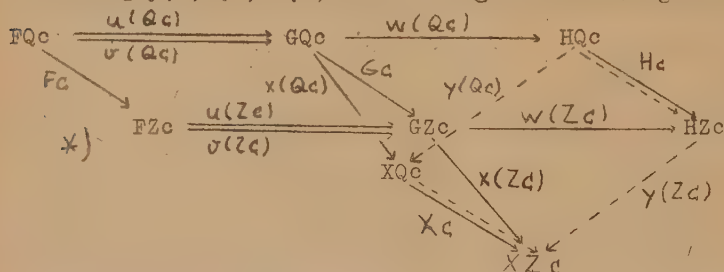
$F \xrightarrow[u]{u} G \xrightarrow{w} H$ ist genau dann exakt in $\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$, wenn für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ die Folge $\hat{C}F = \hat{C}G \xrightarrow[\hat{C}v = \sigma(C)]{\hat{C}u = u(C)} \hat{C}G = \hat{C}G \xrightarrow[\hat{C}w = w(C)]{\hat{C}u = u(C)} \hat{C}H = \hat{C}H$ exakt ist.

ii.) Die Funktoren $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(*, A): \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\text{Men}$ sind für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ linksexakt.

Beweis:

i.) Die Bedingung ist notwendig, da die C rechtsexakt sind.

Seien umgekehrt für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ $FC \xrightarrow[u(C)]{\sigma(C)} GC \xrightarrow{w(C)} HC$ exakt und $x: G \rightarrow X$ ein Morphismus mit $xu = xv$. Für $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ genüge $y(C)$ der Beziehung $y(C)w(C) = x(C)$. Für $c \in M\mathcal{L}$ sind im Diagramm



nach Voraussetzung bzw. Konstruktion alle Teildigramme zunächst bis auf das gestrichelte kommutativ. Da $w(Qc)$ für alle $c \in M\mathcal{L}$ Epimorphismus ist, resultiert auch die Kommutativität des gestrichelten Diagramms und damit $y := (y(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \in \text{Hom}(H, X)$, q.e.d..

ii.) Es gilt folgende Kette von Implikationen:

$F \xrightarrow[u]{u} G \xrightarrow{w} H$ ist exakt $\times$

$FC \xrightarrow[u(C)]{\sigma(C)} GC \xrightarrow{w(C)} HC$ ist exakt für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ (nach i.) $\times$

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(HC, A) \xrightarrow{\text{Hom}(w(C), A)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(GC, A) \xrightarrow[\text{Hom}(\sigma(C), A)]{\text{Hom}(u(C), A)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(FC, A)$ ist exakt für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ und $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ $\times$

$\prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(HC, A) \xrightarrow{\prod \text{Hom}(w(C), A)} \prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(GC, A) \xrightarrow[\prod \text{Hom}(\sigma(C), A)]{\prod \text{Hom}(u(C), A)} \prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(FC, A)$ ist exakt für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ (**) $\times$

$\text{Hom}_\Gamma(H, A) \xrightarrow{\text{Hom}_\Gamma(w, A)} \text{Hom}_\Gamma(G, A) \xrightarrow[\text{Hom}_\Gamma(v, A)]{\text{Hom}_\Gamma(u, A)} \text{Hom}_\Gamma(F, A)$ ist
exakt für alle $A \in \mathcal{O}$.

Die letzte Implikation folgt so: Zunächst sind jedenfalls für
alle $A \in \mathcal{O} \cap \text{Hom}(w, A)$ injektiv und

$\text{Hom}_\Gamma(u, A) \text{Hom}_\Gamma(w, A) = \text{Hom}_\Gamma(v, A) \text{Hom}_\Gamma(w, A)$, was unmittelbar aus der
Exaktheit der Zeile $**$) folgt.

Sei schließlich $x \in \text{Hom}_\Gamma(G, A)$ mit $xu = xv$. Dann existiert nach $**$)
ein $y \in \bigcap_{c \in \mathcal{O}} \text{Hom}_\Gamma(HC, A)$ mit $yw = x$. Daß y sogar in $\text{Hom}_\Gamma(H, A)$
liegt, folgt mit Hilfe eines ähnlichen Diagramms wie $*$) in i.).

Man ersetze in $*$) XQc und XZc durch A, Xc durch 1_A und außer-
dem die Bedingung " $c \in M\mathcal{L}$ " durch " $c \in \Gamma$ ".

Bemerkung 6.4:

Alle Ergebnisse dieses Abschnitts gelten mutatis mutandis
auch für funkt statt Punkt.

KAPITEL II: PAARE UNIVERSELL DIREKT VERBUNDENER KATEGORIEN

§ 1. Zusammenhang zwischen Paaren universell direkt verbundener

Kategorien und Funktoren

Definition 1.1:

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein $\mathcal{U}$ -Paar direkt verbundener Kategorien.

$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ heißt universell direkt verbunden, falls es eine Abbildung $r: \mathcal{O}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{B}$ und zu jedem $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ einen Morphismus $s(A) : A \longrightarrow r(A)$ so gibt, daß für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{O}\mathcal{B}$ $\text{Hom}(s(A), B) : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(r(A), B) \longrightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(A, B)$ bijektiv ist. Man sagt dann auch, das Paar $(A, r(A))$, $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$, habe die universelle Faktorisierungseigenschaft (s. auch [16]).

Satz 1.2:

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien.

i.) Folgende Aussagen sind äquivalent:

a.) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist universell direkt verbunden.

b.) Es gibt einen covarianten Funktor $S: \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ und einen funktoriellen Isomorphismus $\zeta: \text{Hom}_{\mathcal{B}}(S*, *) \longrightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(*, *)$.

c.) Für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ ist der Funktor $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(A, *) : \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ Men in $\mathcal{B}$ repräsentierbar.

ii.) Sind die äquivalenten Bedingungen von i.) erfüllt, so erhält man einen funktoriellen Epimorphismus $s: \text{id}_{\mathcal{A}} \rightarrow S$ durch die Festsetzung $s(A) := \zeta(A, SA)(1_{SA})$. (s heißt dann kanonischer Epimorphismus zum Paar (S, ζ) und (S, ζ, s) ein universelles Tripel von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, Notation: $(S, \zeta, s) \dashv (\mathcal{A}, \mathcal{B})$, s. auch Kan[9]). Ist (S', ζ', s') ein weiteres universelles Tripel zu $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, so gibt es genau einen funktoriellen Isomorphismus $b: S \longrightarrow S'$ mit $bs = s'$.

iii.) Sind $\mathcal{A}_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, eine Familie von Kategorien, $\mathcal{A} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_{\lambda}$ und $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ universell speziell direkt verbunden (I, §5), so ist S ebenfalls speziell.

Beweis:

i.) a.) > b.) Zu jedem $a \in M\mathcal{O}$ existiert nach Voraussetzung genau ein $a' \in M\mathcal{L}$ mit $a's(Qa) = s(Za)a$. Die Zuordnung

$$0\mathcal{O} \ni A \rightsquigarrow SA := r(A) \in 0\mathcal{L}$$

$$M\mathcal{O} \ni a \rightsquigarrow Sa := a' \in M\mathcal{L} \quad \text{ist ein covarianter Funktor}$$

und offenbar ist $s := (s(A))_{A \in 0\mathcal{O}} : \text{id}_{0\mathcal{O}} \rightarrow S$ ein funktorieller

Morphismus. Dann ist aber auch mit $\zeta(A, B) := \text{Hom}(s(A), B)$

$\zeta := (\zeta(A, B))_{(A, B) \in 0\mathcal{O} \times 0\mathcal{L}} : \text{Hom}_{\mathcal{L}}(S*, *) \longrightarrow \text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(*, *)$ ein funktorieller Morphismus; ζ ist Isomorphismus, da nach a.) $\text{Hom}(s(A), B)$

für alle $A \in 0\mathcal{O}$ und $B \in 0\mathcal{L}$ bijektiv ist.

b.) > c.) Mit den Bezeichnungen von b.) ist insbesondere für

alle $A \in 0\mathcal{O}$ $(\zeta(A, B))_{B \in 0\mathcal{L}} : \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA, *) \longrightarrow \text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(A, *)$ ein funktorieller Isomorphismus, d.h. $\text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(A, *)$ ist in $\mathcal{L}$ durch SA repräsentierbar.

c.) > a.) Sei $A \in 0\mathcal{O}$. Dazu seien mit Hilfe des Auswahlaxioms ein Objekt $B_A \in 0\mathcal{L}$ und ein funktorieller Isomorphismus

$$\zeta'_A : \text{Hom}_{\mathcal{L}}(B_A, *) \longrightarrow \text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(A, *) \text{ gewählt.}$$

Wir definieren dann $r : 0\mathcal{O} \rightarrow 0\mathcal{L}$ durch $r(A) := B_A$ und $s(A) = \zeta'_A(B_A)(1_{B_A})$.

Für alle $B \in 0\mathcal{L}$ und $b : B_A \rightarrow B$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{L}}(B_A, B_A) - \zeta'_A(B_A) & \longrightarrow & \text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(A, B_A) \\ \text{Hom}(B_A, b) & & \text{Hom}(A, b) \\ \text{Hom}_{\mathcal{L}}(B_A, B) - \zeta'_A(B) & \longrightarrow & \text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(A, B) \end{array} \text{ kommutativ,}$$

also $\zeta'_A(B)(b) = \zeta'_A(B)\text{Hom}(B_A, b)(1_{B_A}) = \text{Hom}(A, b)\zeta'_A(B_A)(1_{B_A}) =$
 $= \text{Hom}(A, b)(s(A)) = bs(A) = \text{Hom}(s(A), B)(b)$. Also ist

$\text{Hom}(s(A), B) = \zeta'_A(B) : \text{Hom}_{\mathcal{L}}(r(A), B) \longrightarrow \text{Hom}_{(0\mathcal{L})}(A, B)$ bijektiv, q.e.d.

ii.) Wie im Teil i.), c.) > a.) zeigt man, daß mit $s(A) :=$

$\zeta(A, SA)(1_{SA})$ $\text{Hom}(s(A), B) = \zeta(A, B)$ für alle $A \in 0\mathcal{O}$ und $B \in 0\mathcal{L}$ gilt.

Ist $a \in M\mathcal{O}$, so liefert die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{L}}(S\mathbf{Za}, S\mathbf{Za}) &= \zeta(\mathbf{Za}, S\mathbf{Za}) = \text{Hom}(s(\mathbf{A}), S\mathbf{Za}) \longrightarrow \text{Hom}_{(\alpha, \mathcal{L})}(\mathbf{Za}, S\mathbf{Za}) \\ \text{Hom}(\mathbf{Sa}, S\mathbf{Za}) & \qquad \qquad \qquad \text{Hom}(\mathbf{a}, S\mathbf{Za}) \\ \text{Hom}_{\mathcal{L}}(S\mathbf{Qa}, S\mathbf{Za}) &= \zeta(\mathbf{Qa}, S\mathbf{Za}) = \text{Hom}(s(\mathbf{Qa}), S\mathbf{Za}) \longrightarrow \text{Hom}_{(\alpha, \mathcal{L})}(\mathbf{Qa}, S\mathbf{Za}) \end{aligned}$$

die Beziehung $s(\mathbf{Za})\mathbf{a} = \mathbf{Sa}$ $s(\mathbf{Qa})$, d.h. $s := (s(\mathbf{A}))_{\mathbf{A} \in \mathcal{O}\mathcal{A}} : \text{id}_{\mathcal{O}\mathcal{A}} \longrightarrow S$ ist funktorieller Morphismus.

s ist Epimorphismus, da für alle $\mathbf{A} \in \mathcal{O}\mathcal{A}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ $\text{Hom}(s(\mathbf{A}), \mathbf{B})$ insbesondere injektiv und damit $s(\mathbf{A})$ Epimorphismus sind.

Der zweite Teil von ii.) wird aus Satz 1.4 folgen.

iii.) Sei also $(\prod_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}, \mathcal{L})$ universell speziell direkt verbunden und $(S, \zeta, s) \rightarrow (\prod_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}, \mathcal{L})$.

Seien $\lambda_0 \in \Lambda$, $(\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0} \in \mathcal{O} \prod_{\lambda + \lambda_0} \mathcal{O}_{\lambda}$ und $\mathcal{O}_{\lambda_0}$ und $\mathcal{L}$ etwa additiv. Aus der Voraussetzung folgt, daß dann das Paar $(\mathcal{O}_{\lambda_0}, \mathcal{L})$ mit der von $(\prod_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}, \mathcal{L})$ induzierten Verbindung zu $(\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}$ additiv ist.

Seien nun $\mathbf{A}_{\lambda_0}, \mathbf{A}'_{\lambda_0} \in \mathcal{O}\mathcal{O}_{\lambda_0}$ und $\mathbf{a}_{\lambda_0}, \mathbf{a}'_{\lambda_0} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\lambda_0}}(\mathbf{A}_{\lambda_0}, \mathbf{A}'_{\lambda_0})$. Dann ist $S(\mathbf{a}_{\lambda_0} + \mathbf{a}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})s(\mathbf{A}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) = s(\mathbf{A}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})(\mathbf{a}_{\lambda_0} + \mathbf{a}'_{\lambda_0}) = s(\mathbf{A}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})\mathbf{a}_{\lambda_0} + s(\mathbf{A}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})\mathbf{a}'_{\lambda_0} = S(\mathbf{a}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})s(\mathbf{A}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) + S(\mathbf{a}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})s(\mathbf{A}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) = (S(\mathbf{a}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) + S(\mathbf{a}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}))s(\mathbf{A}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})$, was, da $s(\mathbf{A}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) = s((\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$ Epimorphismus ist,

$S(\mathbf{a}_{\lambda_0} + \mathbf{a}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) = S(\mathbf{a}_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0}) + S(\mathbf{a}'_{\lambda_0}, (\mathbf{A}_{\lambda})_{\lambda + \lambda_0})$ impliziert.

Bemerkungen und Bezeichnungen 1.3:

1.) Ist $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ ein Paar universell direkt verbundener Kategorien, so wählen wir aus der Menge aller zu $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ gehörenden universellen Tripel ein Tripel (S, ζ, s) aus und nennen dann $S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} := S$ den universellen Funktor von $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ mit dem kanonischen Isomorphismus $G_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} := \zeta$ und dem kanonischen Epimorphismus $s_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} := s : \text{id}_{\mathcal{O}} \longrightarrow S$.

2.) Zu jedem Paar $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ direkt verbundener Kategorien gibt es eine größte volle Unterkategorie $\mathcal{O}'$ von $\mathcal{O}$ derart, daß $(\mathcal{O}', \mathcal{L})$ (mit der induzierten Verbindung) universell direkt verbunden ist ($\mathcal{O}' = \emptyset$ nicht ausgeschlossen). Wir setzen dann $S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} := S_{(\mathcal{O}', \mathcal{L})}$.

Wir werden im folgenden aus Bequemlichkeit immer annehmen, daß der Funktor $S(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ auf ganz $\mathcal{O}$ definiert ist; für viele der folgenden Betrachtungen reicht es aber, die Existenz von $S(\mathcal{O}, \mathcal{L}) A$ für gewisse $A \in \mathcal{O}$ anzunehmen. Mutatis mutandis gelten die folgenden Ergebnisse auch für diesen allgemeinen Fall.

3.) Sei $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ universell direkt verbunden und (S, σ, s) das universelle Tripel von $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$.

Für alle $A \in \mathcal{O}$, $v \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA, \cdot)$ und $u \in \text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$ seien $v^b := vs(A)$ und $u^\#$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $u^\# \circ s(A) = u$. Offenbar sind dann $(v^b)^\# = v$ und $(u^\#)^b = u$.

Ist hier u ein Epimorphismus, so gilt das Gleiche von $u^\#$.

4.) Im dualen Fall lauten Definition 1.1 und der erste Teil von Satz 1.2 folgendermaßen:

Definition 1.1*:

Ein Paar $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ invers verbundener Kategorien heißt universell invers verbunden, falls eine Abbildung $r: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}$ und zu jedem $A \in \mathcal{O}$ ein Morphismus $t(A): r(A) \rightarrow A$ so existieren, daß für alle $B \in \mathcal{L}$ $\text{Hom}(B, t(A)): \text{Hom}_{\mathcal{L}}(B, r(A)) \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})}(B, A)$ bijektiv ist.

Satz 1.2*:

Sei $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ ein Paar invers verbundener Kategorien.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ ist universell invers verbunden.
- Es gibt einen kovarianten Funktor $T: \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ und einen funktoriellen Isomorphismus $\tau: \text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, T*) \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})}(*, *)$.
- Für alle $A \in \mathcal{O}$ ist der contravariante Funktor $\text{Hom}_{(\mathcal{L}, \mathcal{O})}(*, A): \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{O}$ Men in $\mathcal{L}$ repräsentierbar.

Der folgende Satz untersucht die Frage der Abhängigkeit der universellen Funktoren von der Verbindung und zeigt insbesondere, daß die Begriffe "Funktor" und "Paar universell verbundener

Kategorien" nur andere Beschreibungen des gleichen Sachverhaltes sind.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathcal{U}$ -Kategorien und $\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die volle Unterkategorie von $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ aller universell direkt verbundenen Paare $\mathcal{P}$. Zu jedem solchen Paar $\mathcal{P}$ sei $(S_{\mathcal{P}}, \mathcal{G}_{\mathcal{P}}, s_{\mathcal{P}})$ das universelle Tripel.

Sei $\text{RepFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$ die volle Unterkategorie von $\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$ aller Funktoren $T(*, *)$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ $T(A, *) : \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{U}\text{Men}$ in $\mathcal{B}$ repräsentierbar ist.

Die Äquivalenz von $\text{Verb}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit $\text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$ induziert eine Äquivalenz von $\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $\text{RepFunkt}(\mathcal{A}^* \times \mathcal{B}, \mathcal{U}\text{Men})$.

Satz 1.4 :

i.) Seien $(S, \mathcal{G}, s) \rightarrow \mathcal{P}$ und $(S', \mathcal{G}', s') \rightarrow \mathcal{P}', \mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Zu jedem $X \in \text{Hom}_{\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ existiert genau ein $b \in$

$\text{Hom}_{\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(S', S)$ derart, daß $\text{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{s'} S' \xrightarrow{Xs} S \xrightarrow{b} S'$ kommutativ ist.

ii.) Bezeichnen wir den nach i.) eindeutig existierenden Morphismus b mit $Xs_{\mathcal{P}} = bs'_{\mathcal{P}}$ mit FX , so ist die Zuordnung

$\text{Oud}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ni \mathcal{P} \rightsquigarrow F\mathcal{P} := S_{\mathcal{P}} \in \text{OFunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$\text{Mud}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ni X \rightsquigarrow FX \in \text{MFunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

eine Antiäquivalenz, d.h. F ist eine Äquivalenz von $\text{Ud}(\mathcal{A}, \mathcal{B})^*$ und $\text{Funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Beweis :

i.) Es gibt genau einen funktoriellen Morphismus $\psi(*, *)$ derart, daß $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(S(*, *) - \mathcal{G} = \text{Hom}(s(*), *), *) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(*, *)$

$\downarrow \psi(*, *) \quad \downarrow X(*, *)$
 $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(S'(*, *) - \mathcal{G}' = \text{Hom}(s'(*), *), *) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}'}(*, *)$ kommutativ ist.

Im wesentlichen nach [6], Chap. I, Prop. 1, Cor. 2, analog zum Beweis von 1.2, gibt es dann genau einen funktoriellen Morphismus

$b: S' \longrightarrow S$ mit $\text{Hom}(b(*), *) = \psi(*, *)$.

Die Kommutativität des obigen Diagramms impliziert ähnlich wie im Beweis von 1.2 die Beziehung $bs' = xs$ und umgekehrt, woraus Existenz und Eindeutigkeit von b folgen.

ii.) Daß F ein contravarianter Funktor ist, resultiert aus der Existenz und Eindeutigkeit von FX nach i.). Der contravariante Umkehrfunktor zu F wird induziert von dem contravarianten Funktor $I_{\alpha, L} : \text{Funkt}(\mathcal{A}, L) \rightsquigarrow \text{Verb}(\mathcal{A}, L)$, der auf den Objekten durch $S \rightsquigarrow (\mathcal{A}, L)^S$ gegeben ist (I, 5.2, 1)).

Folgerungen 1.5 :

1.) Seien $\mathcal{A}$ und L Kategorien. Sei $\text{AdjFunkt}(L, \mathcal{A})$ die volle Unterkategorie von $\text{Funkt}(L, \mathcal{A})$ aller Funktoren von L in $\mathcal{A}$, welche einen rechtsadjungierten Funktor im Sinne von Kan[9] haben.

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Funkt}(L, \mathcal{A}) & \xrightarrow{I_{\alpha, L}} & \text{Verb}(\mathcal{A}, L) & \xleftarrow{\mathcal{P}} & \text{Funkt}(\mathcal{A}^* \times L, \mathcal{A} \text{Men}) \\
 \uparrow \text{Inj} & & \uparrow \text{Inj} & & \uparrow \text{Inj} \\
 \text{AdjFunkt}(L, \mathcal{A}) & \xrightarrow{I_{\alpha, L, \text{ind}}} & \text{Ud}(\mathcal{A}, L) & \xleftarrow{\mathcal{P}_{\text{ind}}} & \text{RepFunkt}(\mathcal{A}^* \times L, \mathcal{A} \text{Men}) \\
 & & & \searrow F & \searrow F \mathcal{P}_{\text{ind}} \\
 & & & & \text{Funkt}(\mathcal{A}, L)
 \end{array}$$

in dem $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_{\text{ind}}$ Äquivalenzen und F und $F \mathcal{P}_{\text{ind}}$ Antiäquivalenzen sind.

Der Funktor $F I_{\alpha, L, \text{ind}} : \text{AdjFunkt}(L, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Funkt}(\mathcal{A}, L)$ und der vorige Satz liefern insbesondere die Sätze 3.2 usw. von Kan[9].

Wir sehen damit, daß die Begriffe "Funktor" und "Paar universell direkt verbundener Kategorien" im wesentlichen äquivalent sind, d.h. daß jeder Funktor bis auf Isomorphie der universelle einer geeigneten Verbindung ist. Das Ziel dieser Arbeit im Lichte dieses Ergebnisses ist die Untersuchung von Funktoren mit Hilfe von Verbindungen von Kategorien.

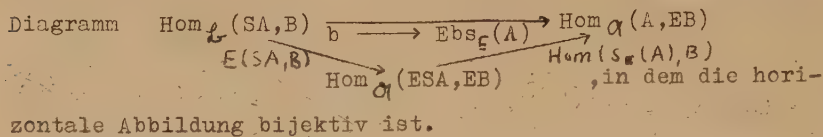
Im folgenden benutzen wir den Ausdruck universeller Funktor im Sinne von "universell zu einer gegebenen Verbindung".

2.) Sei $E \in \text{OAdjFunkt}(L, \mathcal{A})$ und $S := S(\mathcal{A}, L)^E$ mit dem kanonischen

Epimorphismus $s: \text{id}_{\mathcal{O}} \rightarrow S$. Dann ist $s_E: \text{id}_{\mathcal{O}} \rightarrow ES(I, 5.2, 1)$

der in [9] definierte kanonische Morphismus.

Für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{O}$ und $B \in \mathcal{O} \mathcal{L}$ erhalten wir ein kommutatives



Insbesondere sind also $E(SA, B)$ injektiv und $\text{Hom}(s_E(A), B)$ surjektiv für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{O}$, $B \in \mathcal{O} \mathcal{L}$.

Die nächste Behauptung zeigt, daß bei Funktoren in mehreren Variablen nichts wesentlich Neues hinzukommt.

Behauptung 1.6.:

Seien $\mathcal{O}_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, und $\mathcal{L}$ Kategorien und $(\prod_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}, \mathcal{L})$ direkt verbunden. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- i.) $(\prod_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}, \mathcal{L})$ ist universell direkt verbunden.
- ii.) Für alle $(A_{\lambda})_{\lambda \neq \lambda_0} \in \mathcal{O} \prod_{\lambda \neq \lambda_0} \mathcal{O}_{\lambda}$ ist das mit der induzierten Verbindung zu $(A_{\lambda})_{\lambda \neq \lambda_0}$ verbundene Paar $(\mathcal{O}_{\lambda_0}, \mathcal{L})$ universell direkt verbunden.

Sind die äquivalenten Bedingungen i.) und ii.) erfüllt und ist $S: \prod_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ ein universeller Funktor mit dem kanonischen Epimorphismus $s: \text{id}_{\prod \mathcal{O}_{\lambda}} \rightarrow S$, so ist für alle $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(A_{\lambda})_{\lambda \neq \lambda_0}$ der induzierte Funktor $S(*, (A_{\lambda})_{\lambda \neq \lambda_0}): \mathcal{O}_{\lambda_0} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ ein universeller Funktor mit dem kanonischen Epimorphismus $s(*, (A_{\lambda})_{\lambda \neq \lambda_0})$.

Der Beweis ist klar.

Die vorige Behauptung ist trotz ihrer Einfachheit ein bequemes Hilfsmittel. Sie zeigt nämlich, daß sich die Untersuchung von universellen Funktoren mehrerer Variablen auf diejenige von universellen Funktoren einer Variablen zurückführen läßt, jedenfalls in den Eigenschaften, die komponentenweise definiert sind.

§2. Der kanonische Epimorphismus

$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sei ein Paar universell direkt verbundener Kategorien mit dem universellen Funktor S und dem kanonischen Morphismus s . Die folgende Behauptung charakterisiert die Situationen, in denen s Monomorphismus ist.

Behauptung 2.1:

i.) Für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ ist $s(A)$ genau dann Monomorphismus, wenn für verschiedene Elemente $a, a' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, A)$ ein $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ mit $fa \neq fa'$ existiert. (Man sagt dann auch, $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ trenne $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, A)$).

ii.) Folgende Aussagen sind äquivalent:

a.) Zu verschiedenen Elementen a und a' aus $M\mathcal{O}\mathcal{A}$ mit $Za = Za'$ existiert ein f mit $Zf \in \mathcal{O}\mathcal{B}$ und $fa \neq fa'$.

b.) Für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ ist $s(A)$ ein Monomorphismus.

c.) $S : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ ist eine Einbettung, d.h. für alle $A, A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ ist $S(A, A') : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(SA, SA')$ injektiv.

Beweis:

i.) Die Bedingung ist notwendig; denn ist $s(A)$ Monomorphismus, so ist für verschiedene $a, a' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, A)$ $s(A)a \neq s(A)a'$.

Sei umgekehrt $s(A)$ kein Monomorphismus. Dann existieren $a \neq a'$ mit $s(A)a = s(A)a'$. Für alle $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ existiert aber genau ein $b \in M\mathcal{B}$ mit $f = bs(A)$, also $fa = bs(A)a = bs(A)a' = fa'$, q.e.d..

ii.) a.) und b.) sind nach i.) äquivalent.

b.) $\Rightarrow$ c.) Seien $A, A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ und $a, a' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ mit $Sa = Sa'$. Daraus folgt $s(A')a = Sa' \cdot s(A) = Sa' \cdot s(A) = s(A')a'$, also $a = a'$, da $s(A')$ Monomorphismus ist.

c.) $\Rightarrow$ b.) Sei andererseits $s(A_0)$ kein Monomorphismus, $A_0 \in \mathcal{O}\mathcal{A}$. Dann existieren $a, a', a \neq a'$, mit $s(A_0)a = s(A_0)a'$. Dann ist auch $Sa \cdot s(Qa) = Sa' \cdot s(Qa)$, woraus $Sa = Sa'$ folgt, da $s(Qa)$ Epimorphismus ist.

Bemerkung 2.2([1]):

Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien von Mengen

mit Struktur (der Einfachheit halber seien Strukt $\mathcal{A}$ und Strukt $\mathcal{B}$ über einer Hauptbasismenge definiert), so ist $s(A)$ genau dann injektiv, wenn die Abbildungen aus $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ die Elemente von A trennen, d.h. wenn zu verschiedenen $x, x' \in A$ ein f aus $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ mit $f(x) \neq f(x')$ existiert.

In vielen Fällen ist die Entscheidung der Frage, ob s injektiv oder Monomorphismus ist oder wie der Kern von s (in einem geeigneten Sinn) aussieht, nur mit außergewöhnlichen Hilfsmitteln möglich. Für genauere Untersuchungen des Verhältnisses von A und SA ist gerade diese Frage allerdings von entscheidender Bedeutung. Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien von Mengen mit Struktur, so hängt diese Frage eng mit dem Problem der Gleichheit in SA (Speziell: Wortproblem) zusammen.

Wir betrachten die Behauptung 2.1 speziell in dem Fall, wo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ universell direkt verbunden ist mit der kanonischen Verbindung zu einem Funktor $E : \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{A}$. Sei $s : \text{id}_{\mathcal{A}} \rightarrow S$ der kanonische Morphismus.

Folgerung 2.3 :

In der eben beschriebenen Situation ist $s(A)$ (und damit auch $s_E(A)$) genau dann Monomorphismus, wenn die Elemente von $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, E\mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ diejenigen von $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, A)$ trennen. Speziell interessiert noch der Fall, wo $s_E : \text{id}_{\mathcal{A}} \rightarrow ES$ Isomorphismus ist.

Behauptung 2.4 :

In der obigen Situation gelte:

Zu jedem Paar $(A, A') \in \mathcal{O}\mathcal{A} \times \mathcal{O}\mathcal{A}$ existiere ein $B \in \mathcal{O}\mathcal{B}$ derart, daß $EB \approx A'$ und $B(SA, B)$ surjektiv sind.

Dann ist $s_E : \text{id} \longrightarrow ES$ Isomorphismus.

Beweis:

Für alle $(A, A') \in \mathcal{O}\mathcal{A} \times \mathcal{O}\mathcal{A}$ seien $B_{(A, A')} \in \mathcal{O}\mathcal{B}$ und ein

Isomorphismus $i_{(A,A')}: A' \longrightarrow EB_{(A,A')}$ so gewählt, daß $E(SA, B_{(A,A')})$ surjektiv ist. Wir erhalten dann kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA, B_{(A,A')}) & \xrightarrow{b \rightarrow (Eb)s_E(A)} & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, EB_{(A,A')}) & \xrightarrow{\text{Hom}(A, i_{(A,A')})} & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, A') \\ & \searrow E(SA, B_{(A,A')}) & \uparrow \text{Hom}(s_E(A), EB_{(A,A')}) & & \uparrow \text{Hom}(s_E(A), A') \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(ESA, EB_{(A,A')}) & \xrightarrow{\text{Hom}(ESA, i_{(A,A')})} & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(ESA, A'), \end{array}$$

in denen die horizontalen Abbildungen bijektiv sind und

$E(SA, B_{(A,A')})$ nach Voraussetzung surjektiv und damit auch bijektiv sind.

Damit sind auch $\text{Hom}(s_E(A), EB_{(A,A')})$ und schließlich $\text{Hom}(s_E(A), A')$ bijektiv. Da dies für alle $A' \in \mathcal{O}$ gilt, ist $s_E(A)$ Isomorphismus, q.e.d..

Bemerkung 2.5 :

Folgende Aussagen sind äquivalent :

- i.) $s_E : \text{id}_{\mathcal{O}} \rightarrow ES$ ist Isomorphismus.
- ii.) Für alle $A \in \mathcal{O}$ existiert $A' \in \mathcal{O}$ mit $A \cong ESA'$, und für alle $A, A' \in \mathcal{O}$ ist $E(SA, SA')$ surjektiv.

§ 3. Exaktheitsverhalten universeller Funktoren

Behauptung 3.1 :

Sei $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ ein Paar universell direkt verbundener Kategorien mit dem universellen Tripel (S, G, s) .

Genau dann ist S rechtsexakt, wenn die Funktoren

$\text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(*, B) : \mathcal{O}^* \rightsquigarrow \mathcal{U}(\text{Men})$ für alle $B \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ linksexakt sind.

Beweis :

Folgende Aussagen sind äquivalent:

S ist rechtsexakt $\iff$ Für jede in $\mathcal{O}$ exakte Folge $*$) $A' \xrightarrow{a'} A'' \xrightarrow{a} A$ ist $SA' \xrightarrow{Sa'} SA'' \xrightarrow{Sa} SA$ in $\mathcal{L}$ exakt $\iff$

Für alle exakten Folgen $*$) und alle $B \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ ist

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA, B) & \xrightarrow{\text{Hom}(Sa, B)} & \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA'', B) & \xrightarrow{\text{Hom}(Sa', B)} & \text{Hom}_{\mathcal{L}}(SA', B) \\ G(A, B) \downarrow & & G(A'', B) \downarrow & & G(A', B) \downarrow \\ \text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(A, B) & \xrightarrow{\text{Hom}(a, B)} & \text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(A'', B) & \xrightarrow{\text{Hom}(a', B)} & \text{Hom}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(A', B) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen (da G funktorieller Isomorphismus ist) $\otimes \text{Hom}_{(\alpha, \beta)}(*, B)$ ist linksexakt für alle $B \in \mathcal{O} \mathcal{L}$.

Folgerungen 3.2:

1.) Sei (α, β) universell direkt verbunden mit der kanonischen Verbindung zu einem Funktor $E: \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{O}$.

Dann ist $S_{(\alpha, \beta)}$ rechtsexakt.

Beweis:

Für alle $B \in \mathcal{O} \mathcal{L}$ ist $\text{Hom}_{(\alpha, \beta)}(*, B) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(*, EB)$ linksexakt (s. I, §1). Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus 3.1.

2.) Seien $\mathcal{O}$, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{Z}$ Kategorien und $(\mathcal{O} \times \mathcal{L}, \mathcal{Z})$ universell direkt verbunden mit der kanonischen Verbindung zu einem Funktor $E: \mathcal{L}^* \times \mathcal{Z} \rightsquigarrow \mathcal{O}$.

Die Bemerkung im Anschluß an die Definition dieser Verbindung in I, §5 zeigt, daß $S_{(\alpha \times \beta, \gamma)}$ jedenfalls in der ersten Variablen rechtsexakt ist.

In der zweiten Variablen ist $S_{(\alpha \times \beta, \gamma)}$ genau dann rechtsexakt, wenn der in der ersten Variablen contravariante Funktor E linksexakt ist. Das folgt wie in 1.) aus Behauptung 3.1.

Die Bestimmung der Rechtsexaktheit von universellen Funktoren mit Hilfe des Kriteriums 3.1 ist im allgemeinen sehr bequem, häufig sogar trivial.

3.) In folgender Weise geht die Rechtsexaktheit eines Funktors in die Strukturuntersuchung der Bilder des Funktors ein.

Sei $\mathcal{O}$ eine Kategorie mit direkten Summen. Wir nennen ein Objekt A von $\mathcal{O}$ erzeugendes Objekt von $\mathcal{O}$, falls jedes Objekt A' von $\mathcal{O}$ mit Hilfe von A repräsentiert werden kann, d.h. daß zu jedem $A' \in \mathcal{O}$ eine exakte Folge $\bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{j \in J} A_j \longrightarrow A'$ mit $A_i = A = A_j$, $i \in I, j \in J$, existiert.

In Kategorien mit direkten Summen, in denen jeder Mono- und Epi-

morphismus ein Isomorphismus ist, ist jedes erzeugende Objekt ein Generator.

Ist nun $S : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ ein rechtsexakter und mit direkten Summen vertauschbarer Funktor (s. dazu auch § 8), so ist dann auch $\bigoplus SA_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus SA_i \longrightarrow SA'$ exakt, d.h. SA' ist durch SA schon eindeutig bestimmt. Häufig läßt sich SA selbst sehr leicht bestimmen, die Kenntnis aller SA' beruht dann also im wesentlichen auf der Untersuchung von direkten Summen und des Differenzkerns in $\mathcal{B}$.

§ 4 Universelle Funktoren im Fall von Funktorkategorien

Spezialfälle der universellen Funktoren, die im Zusammenhang mit Diagrammkategorien auftreten, sind die sogenannten Kanschen Limites [9].

Seien zunächst $\mathcal{I}$ eine kleine $\mathcal{U}$ -Kategorie und $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein $\mathcal{U}$ -Paar direkt verbundener Kategorien. Wir betrachten das Paar $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{B}))^{(\text{Id}_{\mathcal{I}}, M_{\mathcal{I}})}$.

Behauptung 4.1 :

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ universell direkt verbunden mit dem universellen Funktor S und dem kanonischen Epimorphismus $s : \text{id}_{\mathcal{A}} \rightarrow S$. Dann ist auch $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{B}))^{(\text{Id}_{\mathcal{I}}, M_{\mathcal{I}})}$ universell direkt verbunden, und zwar ist $S_{\mathcal{I}}$ ein zugehöriger universeller Funktor mit dem kanonischen Epimorphismus $s_{\mathcal{I}} : \text{id}_{\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})} \rightarrow S_{\mathcal{I}}$.

Beweis :

Wir zeigen, daß für alle $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ das Paar $(S_{\mathcal{I}} F, s_{\mathcal{I}}(F))$ die universelle Faktorisierungseigenschaft hat.

Seien also $G \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ und $(f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}(F, G)$. Insbesondere ist dann für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{I}$ $f(C) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(FC, GC)$, also gibt es genau ein $b(C) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(SFC, GC)$ mit $b(C)s(FC) = f(C)$.

Da $s(FC)$ für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{I}$ Epimorphismus ist, folgen $b = (b(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}(SF, G) = \text{Hom}(S_{\mathcal{I}} F, G)$, $bs_{\mathcal{I}}(F) = f$ und die Eindeutigkeit von b mit

dieser Eigenschaft.

Bemerkungen 4.2 :

1.) Die vorige Behauptung ist im allgemeinen falsch, wenn man das Paar $(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{L}))^{(\text{id}_{\mathcal{Z}}, M_{\mathcal{Z}})}$ durch ein Paar $(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{L}))^{(\text{id}_{\mathcal{Z}}, P)}$, $P \subset M_{\mathcal{Z}}$, ersetzt.

Sie bleibt dagegen richtig in dem Fall, wo $\mathcal{Z}$ selbst schon eine Familie kleiner Kategorien ist und man Funkt durch funkt ersetzt. Das Gleiche gilt von allen weiteren Behauptungen dieses Paragraphen.

2.) Die Behauptung 4.1 läßt sich so interpretieren, daß die kategoriale Eigenschaft des Paares $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, universell direkt verbunden zu sein, beim Übergang zu Funktorkategorien erhalten bleibt.

Wir betrachten die vorige Behauptung 4.1 noch in einem wichtigen Spezialfall. Seien $\mathcal{Z}$ wie oben, $P \subset M_{\mathcal{Z}}$ und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{V}$ -Kategorie. Wir betrachten das direkt verbundene Paar

$$(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A}), \mathcal{A})^P.$$

Ist dieses universell direkt verbunden, so bezeichnen wir den zugehörigen universellen Funktor mit $\overrightarrow{\mathcal{F}}_P(\mathcal{A})$ und den kanonischen Morphismus mit $\overrightarrow{c}_P(\mathcal{A})$ und nennen $\overrightarrow{\mathcal{F}}_P(\mathcal{A})$ direkten Limes von $\mathcal{A}$ über $(\mathcal{Z}, P)$. Die gleiche Bezeichnung benutzen wir, wenn Funkt durch funkt ersetzt ist.

Im dualen Fall erhält man den inversen Limes $\overleftarrow{\mathcal{F}}_P(\mathcal{A})$.

Der Funktor $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{M_{\mathcal{Z}}}(\mathcal{A}) : \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ ist adjungiert zu dem Einbettungsfunktor $\mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A})$ und genau der bei Kan [9] definierte direkte Limes.

Die Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{F}}_P(\mathcal{A}) : \text{funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ sind im allgemeinen nicht zu irgendwelchen trivialen Funktoren adjungiert. Wichtige Funktoren des letzten Typs betrachtet man z.B. in der Kohomologietheorie (s. III, §3).

Seien jetzt $\mathcal{L}$ und $\mathcal{V}$ kleine Kategorien, $\Gamma \subset M\mathcal{L}$ und $\mathcal{O}$ eine Kategorie. Sei $(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^\Gamma$ universell direkt verbunden; wir setzen $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O}) : \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}) \rightsquigarrow \mathcal{O}$ und $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})$ fort zu $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})_{\mathcal{V}} : \text{Funkt}(\mathcal{L} \times \mathcal{V}, \mathcal{O}) \rightsquigarrow \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ und $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})_{\mathcal{V}} : \text{id}_{\text{Funkt}(\mathcal{L} \times \mathcal{V}, \mathcal{O})} \longrightarrow \vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})_{\mathcal{V}}$. Aus 4.1 resultiert dann die

Folgerung 4.3 :

$(\text{Funkt}(\mathcal{L} \times \mathcal{V}, \mathcal{O}), \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O}))$, versehen mit der Verbindung zu $(\text{Proj}_{\mathcal{L} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}}, \Gamma \times M\mathcal{V})$, ist universell direkt verbunden, und $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})_{\mathcal{V}}$ ist ein universeller Funktor dieses Paares. Ebenso gilt die Folgerung für funkt statt Funkt .

Als Folgerung aus der Behauptung 3.1 erhalten wir folgende Aussage über das Exaktheitsverhalten der $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})$.

Behauptung 4.4 :

Die Funktoren $\hat{\mathcal{C}} : \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}) \rightsquigarrow \mathcal{O}$ seien rechtsexakt, und $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})$ existiere.

Dann ist auch $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})$ rechtsexakt.

Beweis :

Die Voraussetzung impliziert nach I, 6.3, daß $\text{Hom}_\Gamma(*, A) :$

$\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}) \rightsquigarrow \mathcal{U} \text{ Men}$ für alle $A \in \mathcal{O}$ linksexakt ist.

Dann ist nach 3.1 aber auch $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{O})$ rechtsexakt, q.e.d..

Beispiele 4.5 :

1.) Sei $\mathcal{L}$ die folgende Kategorie:

$\mathcal{O}\mathcal{L}$ bestehe aus zwei Elementen 1 und 2. Es seien $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(1, 1) = \{1_1\}$, $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(1, 2) = \{(1, 2)\}$ und $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(2, 2) = \{1_2\}$ mit der natürlichen Verknüpfung.

Wir identifizieren $\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$ mit der Kategorie $\text{Morph } \mathcal{O}$ aller Morphismen von $\mathcal{O}$. Der universelle Funktor existiert und ist isomorph zum Funktor "Ziel". Ohne Einschränkung nehmen wir

$\vec{\mathcal{L}}_{M\mathcal{L}}(\mathcal{O}) = \mathcal{Z}$ an.

Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien, so bezeichnen wir analog zu $\text{Morph } \mathcal{A}$ mit $\text{Morph}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Kategorie mit den offensichtlichen Morphismen, deren Objekte alle Morphismen $a \in M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit $Qa \in O\mathcal{A}$ und $Za \in O\mathcal{B}$ sind.

2.) Sei $\mathcal{L}$ definiert durch $O\mathcal{L} = \{1, 2\}$, $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(1, 1) = \{O_1, 1_1\}$, $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(1, 2) = \{O_{1,2}, (1, 2)\}$ und $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(2, 2) = \{O_2, 1_2\}$. Mit der natürlichen Verknüpfung ist $\mathcal{L}$ punktiert.

Sei $\mathcal{A}$ eine punktierte Kategorie; wieder identifizieren wir $\text{funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ mit $\text{Morph } \mathcal{A}$. Den universellen Funktor $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{M\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ bezeichnen wir mit $\text{Cok}_{\mathcal{A}}$ (Cokern), falls er existiert, und den kanonischen Morphismus von Z in $\text{Cok}_{\mathcal{A}}$ mit $\text{cok}_{\mathcal{A}}$. Ohne Einschränkung wählen wir $\text{Cok}_{\mathcal{A}}$ und $\text{cok}_{\mathcal{A}}$ so, daß für alle Morphismen $a \in M\mathcal{A}$ $\text{cok}_{\mathcal{A}} a \in \text{Fa}(Za)$ ist. $\text{Cok}_{\mathcal{A}}$ ist adjungiert zu dem Funktor $\mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Morph } \mathcal{A}$, definiert durch $A \longrightarrow O_A$.

3.) $\mathcal{L}$ bestehe wieder aus zwei Objekten 1, 2 und $M\mathcal{L}$ habe außer den Identitäten zwei Morphismen von 1 nach 2. Wir identifizieren $\text{funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ eine Kategorie, mit der vollen Unterkategorie $\text{DiffMorph } \mathcal{A}$ von $\text{Morph } \mathcal{A} \times \text{Morph } \mathcal{A}$ aller (f, g) mit $Qf = Qg$ und $Zf = Zg$. Den zugehörigen universellen Funktor $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{M\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ bezeichnen wir, falls er existiert, mit $\text{Diffcok}_{\mathcal{A}}$, den $\text{cok}_{\mathcal{A}}$ entsprechenden kanonischen Epimorphismus mit $\text{diffcok}_{\mathcal{A}}$. Eine Folge $A' \xrightarrow[a'']{a'} A'' \xrightarrow{a} A$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann exakt, wenn $\underline{a} = \text{diffcok}_{\mathcal{A}}(a', a'')$ gilt.

Sind $\mathcal{A}$ punktiert und $E : \text{Morph } \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Diffmorph } \mathcal{A}$ der Einbettungsfunktor, definiert durch $Ef := (f, 0)$, und existiert $\text{Diffcok}_{\mathcal{A}}$, so existiert auch $\text{cok}_{\mathcal{A}}$, und es gilt $\text{Diffcok}_{\mathcal{A}} \circ E \cong \text{Cok}_{\mathcal{A}}$.

Sind $\mathcal{A}$ additiv und $D : \text{DiffMorph } \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Morph } \mathcal{A}$ der Differenzfunktorktor, definiert durch $D(f, g) := f - g$, so gelten $D \circ E = \text{id}_{\text{Morph } \mathcal{A}}$ und $\text{Diffcok}_{\mathcal{A}} \cong \text{Cok}_{\mathcal{A}} \circ D$, die letzte Beziehung in dem Sinn, daß

beide Seiten existieren, falls eine existiert, und daß dann die Isomorphie gilt.

4.) Sei R ein nicht notwendig kommutativer Ring mit 1 und I ein Linksideal von R . Wir betrachten R als additive Kategorie mit einem Objekt (Äquivalenz von additiven Kategorien und Ringoiden mit Einselementen) und I als Teilmenge der Morphismen von R . Für jede additive Kategorie $\mathcal{O}$ heißt $\text{funkt}(R, \mathcal{O})$ Kategorie der R -Objekte von $\mathcal{O}$. Im Fall $\mathcal{O} = \text{Ab}$ ist $\text{funkt}(R, \text{Ab}) \cong \text{Mod } R$. Der Funktor $\bar{R}_I : \text{Mod } R \xrightarrow{\sim} \text{Ab}$ ist isomorph zum Funktor $\text{Hom}_R(R/I, *)$ (s. dazu auch III, §3).

§5. Vergleich universeller Funktoren

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung des Satzes 1.4.

Seien $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$, $(\mathcal{Z}, \mathcal{V})$ und $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ Paare universell direkt verbundener Kategorien und $X : (\mathcal{O}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{Z}, \mathcal{V})$ und

$Y : (\mathcal{Z}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ Funktoren mit $e_X = \text{id}_{\{1,2\}} = e_Y$ (s. I, §3).

Fassen wir $\text{id}_{\mathcal{O}}$ und $S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}$ als Funktoren von $\mathcal{O}$ in $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ auf, so erhält man mittels des Funktors $\text{Funkt}(\mathcal{O}, X) :$

$\text{Funkt}(\mathcal{O}, (\mathcal{O}, \mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \text{Funkt}(\mathcal{O}, (\mathcal{Z}, \mathcal{V}))$ einen funktoriellen Morphismus $\text{Funkt}(\mathcal{O}, X)(s_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}) : X|_{\mathcal{O}} \longrightarrow X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}$.

Für jedes $A \in \mathcal{O}$ existiert dann ein eindeutig bestimmter Morphismus $\tilde{X}(A) : S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} X|_{\mathcal{O}} A \longrightarrow X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} A$ derart, daß

$$\begin{array}{ccc} X|_{\mathcal{O}} A \xrightarrow{s_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}} (X|_{\mathcal{O}} A) & \longrightarrow & S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} X|_{\mathcal{O}} A \\ \text{Funkt}(\mathcal{O}, X)(s_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})})(A) & \searrow & \downarrow \tilde{X}(A) \\ X S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} A & \longrightarrow & X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} A \end{array}$$

kommutativ ist.

$\tilde{X} := (\tilde{X}(A))_{A \in \mathcal{O}}$ ist dann sogar ein funktorieller Morphismus von $S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} X|_{\mathcal{O}}$ in $X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}$, und zwar der einzige, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X|_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\text{Funkt}(X|_{\mathcal{O}}, (\mathcal{Z}, \mathcal{V}))(s_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})})} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} X|_{\mathcal{O}} \\ \text{Funkt}(\mathcal{O}, X)(s_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}) \searrow & & \downarrow \tilde{X} \\ & & X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} \end{array}$$

kommutativ

macht.

Die Zuordnung $X \rightarrow \tilde{X}$ hat folgende "funktoriellen" Eigenschaften:

- i.) Ist $(\mathcal{O}, \mathcal{L}) = (\mathcal{Z}, \mathcal{V})$ und $X = \text{id}_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}$, so ist $\tilde{X} = \text{id}_{S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}}$ (s. 1.4)
- ii.) Es gilt $\tilde{YX} = \text{Funkt}(\mathcal{O}, Y|_{\mathcal{V}})(\tilde{X}) \text{Funkt}(\mathcal{Z}, X|_{\mathcal{O}})(\tilde{Y})$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} \quad Y|_{\mathcal{Z}} X|_{\mathcal{O}} & \xrightarrow{\tilde{YX}} & Y|_{\mathcal{V}} X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} \\ \text{Funkt}(X|_{\mathcal{O}}, \mathcal{F})(\tilde{Y}) & \text{Funkt}(\mathcal{O}, Y|_{\mathcal{V}})(\tilde{X}) & \\ \tilde{Y}|_{\mathcal{V}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} X|_{\mathcal{O}} & \text{ist kommutativ.} & \end{array}$$

Spezialfälle :

- 1.) Seien in der obigen Situation $\mathcal{O} = \mathcal{Z}$ ($\mathcal{L} = \mathcal{V}$) und $X|_{\mathcal{O}} = \text{id}_{\mathcal{O}}$ ($X|_{\mathcal{L}} = \text{id}_{\mathcal{L}}$). Man erhält einen funktoriellen Morphismus

$$\tilde{X} : S_{(\mathcal{O}, \mathcal{V})} \rightarrow X|_{\mathcal{L}} S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})} \quad (\tilde{X} : S_{(\mathcal{Z}, \mathcal{V})} X|_{\mathcal{O}} \rightarrow S_{(\mathcal{O}, \mathcal{L})}).$$

- 2.) Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{L}$ Kategorien und $Z : \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ ein Funktor.

Seien $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{V}$ kleine Kategorien, $\Gamma \subset M \mathcal{Z}$, $\Delta \subset M \mathcal{V}$ und $Y : \mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{Z}$ ein Funktor mit $Y \Delta \subset \Gamma$.

Wir bekommen einen Funktor

$$X : (\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^{\Gamma} \longrightarrow (\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{L}), \mathcal{L})^{\Delta} \text{ durch folgende Festsetzungen: Es seien } X|_{\mathcal{O}} := Z \text{ und } X|_{\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})} := \text{Funkt}(Y, Z). \\ \text{Sind } F \in \mathcal{O} \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), A \in \mathcal{O} \mathcal{O} \text{ und } f = (f(C))_{C \in \mathcal{O}} \in \text{Hom}_{\Gamma}(F, A), \\ \text{so sei } Xf := (Zf(Y(D)))_{D \in \mathcal{O}} \in \text{Hom}_{\Delta}(ZFY, ZA).$$

Sind nun die beiden Paare $(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^{\Gamma}$ und

$(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{L}), \mathcal{L})^{\Delta}$ universell direkt verbunden, so ist $\tilde{X}$ ein

Morphismus von $\tilde{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{L}) X|_{\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})}$ in $X|_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O})$, d.h. hier

$$\tilde{X} : \tilde{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{L}) \text{Funkt}(Y, Z) \longrightarrow Z \tilde{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O}), \text{ und zwar ist } \tilde{X} \text{ der einzige Morphismus, der}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Funkt}(Y, Z) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{d}}_{\Delta}(\mathcal{L}) \text{Funkt}(Y, Z)} & \tilde{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{L}) \text{Funkt}(Y, Z) & & \\ \text{Xc}_{\Gamma}^{\tilde{\mathcal{O}}}(\mathcal{O}) & \searrow & \tilde{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\tilde{X}} & \\ & & & \text{kommutativ macht.} & \end{array}$$

- 3.) In 2.) seien speziell $\mathcal{O} = \mathcal{L}$, $Z = \text{id}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{V}$, $Y = \text{id}_{\mathcal{Z}}$ und $\Delta \subset \Gamma$. Dann gilt $\tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma}(\mathcal{O}) = \tilde{X} \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(\mathcal{O})$.

§6. Existenzsätze für universelle Funktoren

Wir formulieren jetzt den Existenzsatz von N.Bourbaki ([1], S.44) in dem Rahmen dieser Arbeit und geben einige allgemeine Anwendungen an. Die Behauptung 6.1 steht im wesentlichen schon bei I.Fleischer[5].

Verabredung :

Ist I eine prägeordnete Menge und $\sim$ die durch die Präordnung induzierte Äquivalenzrelation, so verwenden wir Begriffe, die an sich nur für geordnete Mengen definiert sind, auch bezüglich I , indem wir modulo $\sim$ rechnen. Z.B. heißt ein Element i von I maximal, wenn $i \bmod \sim$ in $I \bmod \sim$ maximal ist.

Wir wenden diese Festsetzung im Fall der prägeordneten Mengen

$\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ an.

Sei $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ ein $\mathcal{M}$ -Paar direkt verbundener Kategorien.

Behauptung 6.1 :

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

i.) $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ ist universell direkt verbunden.

ii.) Für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{M}$ gilt:

a.) Die Menge aller Epimorphismen von $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ ist cofinal in $\text{Hom}_{(\mathcal{M}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$.

b.) $\text{Hom}_{(\mathcal{M}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$ besitzt ein größtes Element.

iii.) Für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{M}$ gilt :

a.) wie in ii.)

b.) $\text{Hom}_{(\mathcal{M}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$ ist induktiv prägeordnet und nach oben gefiltert.

iv.) ii.) oder iii.) gelten für cofinale Teilmengen von

$\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^*(A, \cdot)$ statt für $\text{Hom}_{(\mathcal{M}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$ selbst.

Der Beweis ist trivial. Die Implikation iv.) $\Rightarrow$ i.) ergibt sich mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

Als Folgerung erhalten wir den

Satz 6.2 :

$(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ ist universell direkt verbunden, wenn folgende Bedingungen

erfüllt sind :

i.) In $\mathcal{L}$ existieren direkte Produkte.

ii.) Die Funktoren $\text{Hom}_{(\alpha, \beta)}(A, *) : \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{VMen}$, $A \in \mathcal{OO}$, sind mit direkten Produkten vertauschbar. (Es ist ausreichend, daß für $B = \prod_{\lambda} B_{\lambda} \in \mathcal{OL}$ die kanonische Abbildung von $\text{Hom}_{(\alpha, \beta)}(A, \prod_{\lambda} B_{\lambda})$ in $\prod_{\lambda} \text{Hom}_{(\alpha, \beta)}(A, B_{\lambda})$ eine Surjektion ist).

iii.) Für alle $A \in \mathcal{OO}$ existiert eine cofinale Teilmenge $E(A)$ von Epimorphismen in $\text{Hom}_{(\alpha, \beta)}^*(A, \cdot)$ mit $E(A) \in \mathcal{U}$.

Beweis :

Für alle $A \in \mathcal{OO}$ existiert $\prod_{f \in E(A)} \text{Zf}$ wegen i.) und $E(A) \in \mathcal{U}$ nach

iii.). Nach ii.) existiert $s'(A) \in \text{Hom}_{(\alpha, \beta)}(A, \prod_{f \in E(A)} \text{Zf})$ mit

$p_{\text{Zf}} s'(A) = f$ für $f \in E(A)$; dabei sei $p_{\text{Zf}} : \prod_{f \in E(A)} \text{Zf} \rightarrow \text{Zf}$ die Projektion.

Offenbar ist $f \leq s'(A)$ für alle $f \in E(A)$. Sei $s(A)$ ein Epimorphismus aus $E(A)$, der $s'(A)$ majorisiert. Da $E(A)$ cofinal in $\text{Hom}_{(\alpha, \beta)}^*(A, \cdot)$ ist, gilt das Gleiche von $\{s(A)\}$.

Also ist $s(A)$ größtes Element von $\text{Hom}_{(\alpha, \beta)}^*(A, \cdot)$ und Epimorphismus, was die Behauptung nach 6.1, ii.) impliziert.

Folgendes Kriterium ist vor allem bei Kategorien von Mengen mit Struktur anwendbar.

Ist C Objekt einer Kategorie, so sei $[C]$ die Isomorphieklassse von C .

Behauptung 6.3 :

Die Bedingung iii.) von 6.2 ist erfüllt, wenn Folgendes gilt:

i.) Es gibt eine Abbildung $\varepsilon : \mathcal{OL} \rightarrow \mathcal{VMen}$ mit $\varepsilon([B]) \geq [\varepsilon(B)]$ für alle $B \in \mathcal{OL}$ und $\{1_B | B \in \mathcal{OL}, \varepsilon(B) \subseteq U\} \in \mathcal{U}$ für alle $U \in \mathcal{VMen}$.

ii.) Für alle $A \in \mathcal{OO}$ existiert eine Menge $U(A) \in \mathcal{U}$ derart, daß alle $f \in \text{Hom}_{(\alpha, \beta)}^*(A, \cdot)$ eine Faktorisierung der Form $f = bf'$ mit $b \in M_{\mathcal{L}}$ und einem Epimorphismus f' mit $|\varepsilon(\text{Zf}')| \leq |U(A)|$ gestatten.

Beweis :

Sei für $A \in \mathcal{O}\mathcal{M}$ $E(A) := \{f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot) \mid f \text{ Epi}, \varepsilon(Zf) \subseteq U(A)\}$.

Es ist $E(A) \subseteq \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{O}\mathcal{M} \\ \{1_B\} \in \mathcal{U}, \{ \varepsilon(B') \} \subseteq U(A) }} \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}(A, B) \in \mathcal{U}$, da nach i.)

$\{1_B\} \in \mathcal{U}$ ist, und damit ist auch $E(A) \in \mathcal{U}$.

$E(A)$ ist auch cofinal in $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$. Ist nämlich $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$,

so existieren nach ii.) $b \in M\mathcal{L}$ und ein Epimorphismus g mit

$|\varepsilon(Zg)| \leq |U(A)|$ und $f = bg$. Nach i.) existiert ein $B \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ und

ein Isomorphismus $i : B \rightarrow Zg$ mit $\varepsilon(Zg) \cong \varepsilon(B) \subseteq U(A)$.

Dann sind $i^{-1}g \in E(A)$ und $f = bi(i^{-1}g)$, also ist $E(A)$ cofinal in

$\text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$.

Bemerkungen 6.4 :

1.) Für Kategorien der Gestalt $\mathcal{U} \mid \text{Struk}^{\zeta}$, Struk eine Strukturart mit einer Hauptbasismenge, erhält man eine Abbildung ε , indem man jedem Paar (M, S) einer Menge M mit Struktur S die unterliegende Menge M zuordnet.

2.) Für Paare direkt verbundener Kategorien von Mengen mit Struktur liegt die Hauptschwierigkeit der Verifikation von ii.) in 6.3 darin, überhaupt einen Epimorphismus f' mit $f = bf'$ zu finden. In den meisten Fällen kann man nämlich für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{M}$ ein $U(A) \in \mathcal{O}\mathcal{U}\mathcal{M}$ en so finden, daß für alle Epimorphismen $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{L})}^*(A, \cdot)$ $|\varepsilon(Zf)| \leq |U(A)|$ gilt.

3.) Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ direkt verbunden mit der kanonischen Verbindung zu einem Funktor $E : \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{A}$.

Die Bedingung ii.) in 6.2 ist genau dann erfüllt, wenn E mit direkten Produkten vertauschbar ist.

Beispiele 6.5 :

1.) Sei Struk eine Strukturart über einer Hauptbasismenge und ζ ein Morphismenterm bezüglich Struk . Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A} \mid \text{Struk}^{\zeta}$ und $\text{ve} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{U}\mathcal{M}$ en der Vernachlässigungsfunktor. Die vorigen Sätze zeigen, daß in wichtigen praktisch vorkommenden Fällen der

adjungierte Funktor $F_{\mathcal{A}}$ zu V_e existiert.

Ist M eine Menge, so heißt $F_{\mathcal{A}} M$ das von M in $\mathcal{A}$ erzeugte freie Objekt. $F_{\mathcal{A}}$ ist mit direkten Summen vertauschbar, falls in $\mathcal{A}$ direkte Summen existieren (s. § 8). In diesem Fall ist jedes freie Objekt in $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie direkte Summe von Kopien des Objektes $F_{\mathcal{A}} 0$, wobei 0 eine ausgewählte Menge mit einem Element ist, z.B. $0 := \{\emptyset\}$. $F_{\mathcal{A}} 0$ läßt sich im allgemeinen leicht bestimmen.

Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung $1_{V_e A}^{\vee} : V_e A \longrightarrow A$ surjektiv und damit ein Epimorphismus, also ist auch $(1_{V_e A}^{\vee})^{\#} : F_{\mathcal{A}} V_e A \longrightarrow A$ surjektiv und ein Epimorphismus. Dann ist außerdem

$((1_{V_e A}^{\vee})^{\#})_{A \in \mathcal{A}} : F_{\mathcal{A}} V_e \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{A}}$ ein funktorieller Epimorphismus.

Wenn also in $\mathcal{A}$ direkte Summen und der Funktor $F_{\mathcal{A}}$ existieren, so gibt es für alle $A \in \mathcal{A}$ einen surjektiven Morphismus und insbesondere einen Epimorphismus einer direkten Summe von Kopien von $F_{\mathcal{A}} 0$ auf A .

$F_{\mathcal{A}} 0$ ist sogar erzeugendes Objekt von $\mathcal{A}$, falls zu jedem surjektiven Morphismus a aus $M \in \mathcal{A}$ eine exakte Folge $A \rightrightarrows Qa \xrightarrow{a} Za$ existiert.

Ist $f_{\mathcal{A}} : \text{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow F$ der kanonische Morphismus, so ist $f_{\mathcal{A}}(M)$ für alle $M \in \mathcal{A}$ injektiv, was unmittelbar aus 2.1 folgt.

2.) Die Anwendungen des Ergebnisses 6.2 sind mannigfach (s. z.B. auch [1]); wir geben als weiteres Beispiel Bedingungen dafür an, daß der Funktor "zugeordnete Garbe" (und analog der Funktor "inverses Bild") von Prägarben existiert.

Seien X ein topologischer Raum, $X \in \mathcal{U}$, und $O(X)$ die Topologie von X . Wir betrachten $O(X)$ als durch die Inklusion geordnete Menge. Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $\text{Präg}(X, \mathcal{A})$ die Kategorie der Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{A}$, d.h. die Kategorie der inversen Systeme über $O(X)$ mit Werten in $\mathcal{A}$.

$\mathcal{O}$ habe direkte Produkte. Dann heißt $F \in \text{OPrg}(X, \mathcal{O})$ Garbe, falls für alle $V \in \mathcal{O}(X)$ und alle offenen berdeckungen $\mathcal{V} = (V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von V die Folge

*) $\text{FV} \longrightarrow (F_{V_\lambda}^\vee)_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{FV}_\lambda \xrightarrow[\frac{p(F, \mathcal{V})}{q(F, \mathcal{V})}]{\prod_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda} \text{FV}_\lambda \cap V_\mu} \text{exakt ist;}$
dabei seien $p(F, \mathcal{V})$ und $q(F, \mathcal{V})$ durch die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda} \text{FV}_\lambda & \xrightarrow{p(F, \mathcal{V})} & \prod_{(\lambda, \mu)} \text{FV}_\lambda \cap V_\mu \\ \downarrow \text{Proj} & & \downarrow \text{Proj} \\ \text{FV}_{\lambda_0} & \xrightarrow{F_{V_{\lambda_0} \cap V_{\mu_0}}^\vee} & \text{FV}_{\lambda_0} \cap V_{\mu_0} \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} \prod_{\lambda} \text{FV}_\lambda & \xrightarrow{q(F, \mathcal{V})} & \prod_{(\lambda, \mu)} \text{FV}_\lambda \cap V_\mu \\ \downarrow \text{Proj} & & \downarrow \text{Proj} \\ \text{FV}_{\mu_0} & \xrightarrow{F_{V_{\lambda_0} \cap V_{\mu_0}}^\vee} & \text{FV}_{\lambda_0} \cap V_{\mu_0} \end{array}$$

$(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Lambda$ beliebig, definiert.

$\text{Garb}(X, \mathcal{O})$ sei die volle Unterkategorie von $\text{Präg}(X, \mathcal{O})$ aller Garben auf X mit Werten in $\mathcal{O}$; $E_{\mathcal{O}} : \text{Garb}(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \text{Präg}(X, \mathcal{O})$ sei der Injektionsfunktork.

Wir geben jetzt ein System von Voraussetzungen über $\mathcal{O}$ derart an, daß der Funktor $E_{\mathcal{O}}$ einen rechtsadjungierten Funktor hat.

$\mathcal{O}$ habe folgende Eigenschaften:

- i.) In $\mathcal{O}$ existieren direkte Produkte.
- ii.) Der Funktor $\text{Diffker}_{\mathcal{O}}$ (Differenzkern) existiert.
- iii.) In $\mathcal{O}$ existieren direkte Summen und der Funktor $\text{Bi}_{\mathcal{O}}$ im Sinne von [13].

Bemerkung:

Wir nennen einen Monomorphismus a aus $\text{Morph } \mathcal{O}$ strikt, falls aus $a = a' \circ e$ mit einem Monomorphismus a' und einem Epimorphismus e folgt, daß e Isomorphismus ist.

$\text{Bi}_{\mathcal{O}}$ ist ein Funktor von $\text{Morph } \mathcal{O}$ in die volle Unterkategorie $\text{Mon } \mathcal{O}$ von $\text{Morph } \mathcal{O}$ aller Monomorphismen. Ist $a \in \text{OMorph } \mathcal{O}$, so ist $\text{Bi}_{\mathcal{O}} a$ ein strikter Monomorphismus aus $\text{Un}(\mathcal{Z}a)$ derart, daß $a = \text{Bi}_{\mathcal{O}} a \circ e(a)$ mit einem Epimorphismus $e(a)$ gilt. Sind $a, a' \in$

$\text{OMorph } \mathcal{O}$ und $(b, b') \in \text{Hom}_{\text{Morph } \mathcal{O}}(a, a')$, so ist

$\text{Bi}_{\mathcal{O}}(b, b') = (c, c') \in \text{Hom}_{\text{Morph } \mathcal{O}}(\text{Bi}_{\mathcal{O}} a, \text{Bi}_{\mathcal{O}} a')$, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & e(a) & \longrightarrow & \text{Bi}_{\mathcal{O}} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow b & & & \downarrow c & & \downarrow b' \\ & e(a') & \longrightarrow & \text{Bi}_{\mathcal{O}} a' & \longrightarrow & \end{array} \quad \text{ist kommutativ.}$$

Die Existenz des Funktors Bi_α impliziert insbesondere, daß das Produkt von zwei strikten Monomorphismen in α wieder strikt ist [13].

iv.) Es gibt einen mit direkten Produkten vertauschbaren, links-exakten und Monomorphismen erhaltenden Funktor $D : \alpha \rightsquigarrow \alpha_{\text{Men}}$ derart, daß Folgendes gilt :

a.) Ist $A \in O\alpha$ und $H \subset \text{Hom}_\alpha(\cdot, A)$ eine nach oben gefilterte Teilmenge, $H \in \mathcal{V}$, so ist

$$D \text{ Bi}_\alpha \left(\bigoplus_{h \in H} Qh - (h)_{h \in H} \rightarrow A \right) = \sup_{h \in H} \text{Bi}_{\text{Men}} Dh \quad \text{in } \text{Un}(DA).$$

b.) Eine Folge $A \xrightarrow{a} A' \xrightarrow{a'} A''$ in α ist exakt, wenn a strikter Monomorphismus und $DA \xrightarrow{Da} DA' \xrightarrow{Da'} DA''$ in α_{Men} exakt ist.

c.) $D_\alpha : O\alpha \rightarrow O\alpha_{\text{Men}}$ ist eine Abbildung mit den in 6.3, i.) aufgeführten Eigenschaften.

Unter den Voraussetzungen i.) bis iv.) genügt das Paar $(\text{Präg}(X, \alpha), \text{Garb}(X, \alpha))^{\text{E}\alpha}$ den Bedingungen i.) bis iii.) von 6.2, insbesondere gibt es also einen rechtsadjungierten Funktor zu $\text{E}\alpha$.

Der Beweis verläuft in mehreren Schritten:

1.) Die Existenz direkter Produkte in α (nach i.)) impliziert die Existenz direkter Produkte in $\text{Präg}(X, \alpha)$. Das direkte Produkt in $\text{Präg}(X, \alpha)$ von Garben ist wieder eine Garbe, da $\prod$ mit $\prod$ vertauschbar und linksexakt ist (s. § 8), die Relation

*) also bei Produktbildung erhalten bleibt. Damit existieren auch in $\text{Garb}(X, \alpha)$ direkte Produkte (s. 6.7, 2)), und

$\text{E}\alpha : \text{Garb}(X, \alpha) \rightsquigarrow \text{Präg}(X, \alpha)$ ist mit direkten Produkten vertauschbar. Das Paar $(\text{Präg}(X, \alpha), \text{Garb}(X, \alpha))^{\text{E}\alpha}$ genügt daher den Bedingungen i.) und ii.) von 6.2.

2.) Für alle $V \in O(X)$ ist die Menge aller offenen Überdeckungen $\mathcal{V}$ von V auf die übliche Weise prägeordnet und nach oben gefiltert. Diese Mengen enthalten cofinale Teilmengen, die Elemente

von $\mathcal{U}$ sind. Für alle $V \in \mathcal{O}(X)$ sei $\text{Üb } V$ eine cofinale Teilmenge der Menge aller offenen Überdeckungen von V mit $\text{Üb } V \in \mathcal{U}$.

3.) Sei jetzt $f : F \longrightarrow G$ ein $\mathcal{O}_1$ -Morphismus einer Prägarbe F in eine Garbe G .

Für alle $V \in \mathcal{O}(X)$ und alle offenen Überdeckungen $\mathcal{N} = (V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von V erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 GV & \xrightarrow{(\check{G}_{V_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}} & \prod_{\lambda \in \Lambda} GV_\lambda & \xrightarrow[p(G, \mathcal{N})]{q(G, \mathcal{N})} & \prod_{\lambda \in \Lambda} GV_\lambda \cap V_\mu \\
 \uparrow g_{\mathcal{N}} & & \uparrow f_{\mathcal{N}} = \prod_{\lambda \in \Lambda} f(V_\lambda) & & \uparrow f_{\mathcal{N}} \\
 f(V) & \xrightarrow{K_{\mathcal{N}}} & \prod_{\lambda \in \Lambda} FV_\lambda & \xrightarrow[p(G, \mathcal{N})f_{\mathcal{N}}]{q(G, \mathcal{N})f_{\mathcal{N}}} & \prod_{\lambda \in \Lambda} FV_\lambda \cap V_\mu \\
 \uparrow a_{\mathcal{N}} & & \uparrow (F_{V_\lambda})_{\lambda \in \Lambda} & & \uparrow a_{\mathcal{N}} \\
 FV & & & &
 \end{array}$$

in dem $K_{\mathcal{N}} := \text{Diffker}(p(G, \mathcal{N})f_{\mathcal{N}}, q(G, \mathcal{N})f_{\mathcal{N}})$,

$b_{\mathcal{N}} := \text{diffker}(p(G, \mathcal{N})f_{\mathcal{N}}, q(G, \mathcal{N})f_{\mathcal{N}})$ und $a_{\mathcal{N}}$ und $g_{\mathcal{N}}$ die eindeutig bestimmten Morphismen sind, die das Diagramm kommutativ ergänzen.

Seien nun $i(V) := \text{Bi}_{\mathcal{O}_1}(\bigoplus_{\mathcal{N} \in \text{Üb } V} (g_{\mathcal{N}})_{\mathcal{N} \in \text{Üb } V} \rightarrow GV)$ und $HV := Qi(V)$.

Für alle $V \in \mathcal{O}(X)$ und alle offenen Überdeckungen $\mathcal{N}$ von V ist $\text{Bi}_{\mathcal{O}_1} g_{\mathcal{N}} \leq i(V)$, da $\text{Üb } V$ cofinal ist, und $g_{\mathcal{N}}$ läßt sich daher eindeutig in der Gestalt $g_{\mathcal{N}} = i(V) \cdot g'_{\mathcal{N}}$ faktorisieren. Dann ist $f(V) = i(V) g'_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}}$; $g'_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}}$ hängt damit von $\mathcal{N}$ nicht ab und wird mit $e(V)$ bezeichnet. Damit ist $f(V) = i(V) e(V)$, wobei $i(V)$ nach Konstruktion ein strikter Monomorphismus ist.

Auf Grund der Funktoreigenschaften von $\text{Bi}_{\mathcal{O}_1}$ und von $\oplus$ erhält man für alle offenen $W \subset V$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 GV & \xrightarrow{i(V)} & G_W^\vee & \xrightarrow{i(W)} & GW \\
 \uparrow f(V) & & \uparrow HV & & \uparrow f(W) \\
 f(V) & \xrightarrow{e(V)} & F_W^\vee & \xrightarrow{e(W)} & FW \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 FV & & F_W^\vee & & FW
 \end{array}$$

mit einem eindeutig bestimmten Morphismus $H_W^\vee : HV \longrightarrow HW$.

$(HV, H_W^\vee, V, W \in \mathcal{O}(X))$ wird damit eine Prägarbe, und $i := (i(V))_{V \in \mathcal{O}(X)}$ und $e := (e(V))_{V \in \mathcal{O}(X)}$ sind Prägarbenmorphismen mit $f = ie$.

4.) Für alle Garben K ist in der Situation von 3.) $\text{Hom}(e, K)$ injektiv.

Seien nämlich $u, v : H \longrightarrow K$ Morphismen mit $ue = ve$. Für alle $V \in \mathcal{O}(X)$ und alle offenen Überdeckungen $\mathcal{N} = (V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \text{Üb } V$ ist

$$\begin{array}{ccc} KV & \xrightarrow{\quad} & (K_{V_\lambda}^\vee)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{\quad} \prod_{\lambda} KV_\lambda \\ u(V) \uparrow \uparrow v(V) & & \uparrow \prod u(V_\lambda) \uparrow \prod v(V_\lambda) \\ HV & \xrightarrow{\quad} & (H_{V_\lambda}^\vee)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{\quad} \prod_{\lambda} HV_\lambda \\ \uparrow g_{\mathcal{N}} & & \uparrow \prod e(V_\lambda) \\ K_{\mathcal{N}} & \xrightarrow{b_{\mathcal{N}}} & \prod_{\lambda} FV_\lambda \end{array} \quad \text{kommutativ. Aus}$$

$ue = ve$ folgt $\prod_{\lambda} u(V_\lambda) \prod_{\lambda} e(V_\lambda) = \prod_{\lambda} v(V_\lambda) \prod_{\lambda} e(V_\lambda)$, was wiederum $(K_{V_\lambda}^\vee)_{\lambda \in \Lambda} u(V) g'_{\mathcal{N}} = (K_{V_\lambda}^\vee)_{\lambda \in \Lambda} v(V) g'_{\mathcal{N}}$ und schließlich $u(V) g'_{\mathcal{N}} = v(V) g'_{\mathcal{N}}$ impliziert, da K eine Garbe ist. Da dies für alle $\mathcal{N} \in \text{Üb } V$ gilt, folgt $u(V) = v(V)$, da $(g'_{\mathcal{N}})_{\mathcal{N} \in \text{Üb } V} : \bigoplus_{\mathcal{N} \in \text{Üb } V} K_{\mathcal{N}} \longrightarrow HV$ nach Definition von $\text{Bi}_{\mathcal{O}}$ ein Epimorphismus ist. Also gilt $u = v$, q.e.d..

5.) Sei nun zunächst $\mathcal{O} = \mathcal{U}\text{Men}$.

Definiere $\varepsilon : \mathcal{O}\text{Garb}(X, \mathcal{U}\text{Men}) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{U}\text{Men}$ durch $\varepsilon(G) := \bigcup_{V \in \mathcal{O}(X)} GV$. ε ist eine Abbildung mit den in 6.3, i.) aufgeführten Eigenschaften.

Zu jeder Prägarbe $F \in \mathcal{O}\text{Präg}(X, \mathcal{U}\text{Men})$ sei $U(F) := \bigcup_{V \in \mathcal{O}(X)} \bigcap_{\mathcal{N} = (V_\lambda) \in \text{Üb } V} \prod_{\lambda} FV_\lambda$.

Es ist hier nun trivial, daß die in 3.) konstruierte Prägarbe H eine Garbe ist, da die Garbeneigenschaft *) eine lokale Eigenschaft ist.

$\varepsilon : F \longrightarrow H$ ist ein Epimorphismus in $\text{Hom}_{(\text{Präg}(X, \mathcal{U}\text{Men}), \text{Garb}(X, \mathcal{U}\text{Men}))}^*(F, \cdot)$ und $|\varepsilon(H)| \leq |U(F)|$. Nach 6.3 erfüllt das Paar

$(\text{Präg}(X, \mathcal{U}\text{Men}), \text{Garb}(X, \mathcal{U}\text{Men}))^{E_{\text{Men}}}$ dann die Bedingung iii.)

von 6.2,; aus 1.) und 6.2 resultiert, daß E_{Men} einen adjungierten Funktor besitzt.

6.) Sei jetzt $\mathcal{O}$ wieder eine beliebige Kategorie mit den Eigenschaften i.) bis iv.) von oben.

Die Bedingung iv.) a) und die Linksexaktheit und Vertauschbarkeit mit direkten Produkten von D und 5.) zeigen, daß DH in $\mathcal{O}\text{Garb}(X, \mathcal{U}\text{Men})$ liegt.

Für alle $V \in \mathcal{O}(X)$ und alle offenen Überdeckungen $\mathcal{N} = (V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

von V ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} GV & \xrightarrow{(G_{V_\lambda}^V)_{\lambda \in \Lambda}} & \prod_{\lambda} GV_{\lambda} \\ \uparrow i(V) & & \uparrow \prod i(V_{\lambda}) \\ HV & \xrightarrow{(H_{V_\lambda}^V)_{\lambda \in \Lambda}} & \prod_{\lambda} HV_{\lambda} \end{array} \quad \text{kommutativ.}$$

$(G_{V_\lambda}^V)_{\lambda \in \Lambda} i(V)$ ist nach iii.) strikter Monomorphismus, da $(G_{V_\lambda}^V)_{\lambda \in \Lambda}$ als Differenzkern und $i(V)$ als Bild strikte Monomorphismen sind.

Dann ist aber auch $(H_{V_\lambda}^V)_{\lambda \in \Lambda}$ strikter Monomorphismus.

Da DH Garbe ist, gilt das Gleiche nach iv.) b) dann auch von H selbst.

$e: F \rightarrow H$ ist wieder ein Epimorphismus nach 4.) .

Sei schließlich $\varepsilon': \text{OGarb}(X, \mathcal{O}) \rightarrow \text{OMen}$ durch $\varepsilon'(G) := \varepsilon(DG)$ definiert. ε' ist eine Abbildung mit den Eigenschaften von 6.3, i), da ε (s. 5.)) und D_0 diese Eigenschaften haben. Weiter sei für $F \in \text{OPr}(\mathcal{O})$ $U'(F) := U(DF)$.

ε' und U' genügen auf Grund des Vorangehenden und iv.) a) den Bedingungen von 6.3; also ist 6.2, iii.) für $(\text{Pr}(\mathcal{O}), \text{Garb}(X, \mathcal{O}))^{\text{E} \mathcal{O}}$ ebenfalls erfüllt, d.h. $E_{\mathcal{O}}$ besitzt einen adjungierten Funktor, q.e.d..

Bemerkungen :

i.) Der vorige Beweis gilt ohne Einschränkung, wenn man anstatt eines topologischen Raumes X eine Grothendiecktopologie X verwendet; Elemente des Raumes X gingen in den vorigen Beweis nämlich an keiner Stelle ein.

ii.) Die Voraussetzungen i.) bis iv.) über $\mathcal{O}$ sind z.B. erfüllt für die Kategorien der Abelschen Gruppen, der Gruppen, der Ringe, der topologischen Räume, der lokal konvexen topologischen Vektorräume, der filtrierten Abelschen Gruppen u.a..

iii.) Die Voraussetzungen i.) bis iv.) implizieren insbesondere die Existenz der Funktoren $\tilde{\mathcal{L}}_r(\mathcal{O})$ und $\tilde{\mathcal{L}}_r(\mathcal{O})$, $\mathcal{L}$ eine kleine Kategorie und $\Gamma \subset M\mathcal{L}$. Das folgt aus den Ergebnissen in § 7.

Wir geben hier noch einen Existenzsatz an, der sich mit folgender Fragestellung befaßt: $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ und $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ seien Paare direkt verbundener Kategorien und $X : (\mathcal{A}', \mathcal{B}') \rightsquigarrow (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Funktor, der $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ abbildet. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sei universell direkt verbunden. Wann gilt das Gleiche von $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$? Seien $S := S_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ und $s := s_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

Behauptung 6.6 :

In der obigen Situation seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

- i.) Für alle $A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}', B', B'' \in \mathcal{O}\mathcal{B}'$ seien $X(A', B')$ und $x(B', B'')$ injektiv.
- ii) Zu jedem $A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}'$ existiert ein Morphismus $s'(A')$ mit $Xs'(A') \cong s(XA')$ (in $\text{Morph}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$) und $Qs'(A') = A'$.
- iii.) Für alle $A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}', B' \in \mathcal{O}\mathcal{B}'$ sei das Bild der Abbildung $\text{Hom}(Xs'(A'), XB')^{-1} X(A', B')$ im Bild von $X(Zs'(A'), B')$ enthalten. Dann ist auch $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ universell direkt verbunden, und es gilt $X|_{\mathcal{B}'} \circ S_{(\mathcal{A}', \mathcal{B}')} \cong S_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} X|_{\mathcal{A}'}$.

Beweis:

Wir bemerken zunächst, daß $\text{Hom}(Xs'(A'), XB')^{-1}$ wohldefiniert ist, da wegen $Xs'(A') \cong s(XA')$ mit $\text{Hom}(s(XA'), XB')$ auch $\text{Hom}(Xs'(A'), XB')$ bijektiv ist. Ohne Einschränkung nehmen wir daher $s(XA') = Xs'(A')$ an. Wir zeigen, daß für alle $A' \in \mathcal{O}\mathcal{A}'$ und $B' \in \mathcal{O}\mathcal{B}'$ $\text{Hom}(s'(A'), B')$ bijektiv ist. In den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}'}(Zs'(A'), B') & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(s'(A'), B') & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}', \mathcal{B}')}(\mathcal{A}', B') \\ \downarrow X(Zs'(A'), B') & & & & \downarrow X(A', B') \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(SXA', XB') & \xrightarrow{\text{Hom}(s(XA'), XB')} & & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}(XA', XB') \\ & \text{Hom}(Xs'(A'), XB') & & & \end{array}$$

ist die untere horizontale Abbildung bijektiv. Nach i.) sind die beiden vertikalen Abbildungen injektiv, also gilt das Gleiche von $\text{Hom}(s'(A'), B')$.

Ist $f' \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}', \mathcal{B}')}(\mathcal{A}', B')$, so existiert nach iii.) ein $b' \in \text{Hom}_{\mathcal{B}'}(Zs'(A'), B')$ mit $Xb' = \text{Hom}(s(XA'), XB')^{-1}(Xf')$, d.h. $Xb's(XA') = Xf'$. Nach i.) ist dann aber $b's'(A') = f'$, also ist $Xs'(A')$

$\text{Hom}(s'(A'), B')$ auch surjektiv.

Daß schließlich $S_{(\alpha, \beta)} X|_{\alpha'} \cong X|_{\beta'} S_{(\alpha', \beta')}$ gilt, ist klar.

Spezialfälle 6.7 :

1.) (α, β) sei ein Paar universell direkt verbundener Kategorien und $E : \alpha' \rightsquigarrow \alpha$ ein Funktor. Dann wird (α', β) ein Paar direkt verbundener Kategorien mit der kanonischen Verbindung zu E . E läßt sich trivial fortsetzen zu $X : (\alpha', \beta) \rightsquigarrow (\alpha, \beta)$. X genügt allen Bedingungen von 6.6; also ist auch (α', β) universell direkt verbunden, und es gilt $S_{(\alpha, \beta)} E \cong S_{(\alpha', \beta)}$.

2.) Seien (α, β) ein Paar universell direkt verbundener Kategorien und α' bzw. β' volle Unterkategorien von α bzw. β . (α', β') ist mit der von (α, β) induzierten Verbindung direkt verbunden.

Der Einbettungsfunktor $X : (\alpha', \beta') \rightsquigarrow (\alpha, \beta)$ genügt den Bedingungen von Behauptung 6.6, falls für alle $A' \in \text{Ob } \alpha'$ $S_{(\alpha, \beta)} A' \in \text{Ob } \beta'$ ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert also $S_{(\alpha', \beta')}$, und es ist $X|_{\beta'} S_{(\alpha', \beta')} \cong S_{(\alpha, \beta)} X|_{\alpha'}$.

Ist also z.B. α eine Kategorie mit einer vollen Unterkategorie α' , sind $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, Objekte in $\text{Ob } \alpha'$ und $A \in \text{Ob } \alpha'$ direkte Summe der A_λ in α , so ist A auch direkte Summe der A_λ in α' .

Weitere Existenzsätze für universelle Funktoren werden im Zusammenhang mit der Vertauschbarkeit von Funktoren in § 8 bewiesen.

§ 7. Existenzsätze für direkte Limites.

Wir wenden die Ergebnisse des vorigen Paragraphen an, um Existenzaussagen über die Funktoren $\varinjlim_n (\alpha)$ zu bekommen (s. auch [9]).

Seien also α eine Kategorie, $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{P} \subset \mathcal{M} \mathcal{I}$. Folgende Reduktion des Problems ist fast trivial.

Behauptung 7.1 :

In α gebe es direkte Summen, und der Funktor $\text{Diff} \circ \alpha$

existiere.

Dann existiert $\overline{\mathcal{F}}_{\Gamma}(\mathcal{O})$.

Beweis :

Für alle $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O})$ und $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ seien $a(F, C): FC \rightarrow \bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} FC$ die kanonischen Injektionen.

Es seien $(a(F, Q\gamma))_{\gamma \in \Gamma} : \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} FQ\gamma \longrightarrow \bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} FC$ und $(a(F, Z\gamma)F\gamma)_{\gamma \in \Gamma} : \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} FQ\gamma \longrightarrow \bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} FC$ die durch die $a(F, Q\gamma)$ bzw. $a(F, Z\gamma)F\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, eindeutig induzierten Morphismen. Es seien dann $r(F) := \text{Diffcok}_{\mathcal{O}}((a(F, Q\gamma))_{\gamma \in \Gamma}, (a(F, Z\gamma)F\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ und $s(F) := (\text{diffcok}_{\mathcal{O}}((a(F, Q\gamma))_{\gamma \in \Gamma}, (a(F, Z\gamma)F\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) a(F, C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}}$. Dann ist $s(F) \in \text{Hom}_{\Gamma}(F, r(F))$, und offenbar läßt sich jeder Morphismus $f \in \text{Hom}_{\Gamma}^*(F, \cdot)$ eindeutig über $s(F)$ faktorisieren, q.e.d..

Die Existenz aller Funktoren $\overline{\mathcal{F}}_{\Gamma}(\mathcal{O})$ folgt also schon aus der Existenz der speziellen Funktoren $\bigoplus$ und $\text{Diffcok}_{\mathcal{O}}$ dieses Typs. Trotzdem werden wir in den folgenden Behauptungen weiter alle $\overline{\mathcal{F}}_{\Gamma}(\mathcal{O})$ statt nur $\bigoplus$ und $\text{Diffcok}_{\mathcal{O}}$ behandeln, da dies formal sogar einfacher wird.

Behauptung 7.2 :

$\mathcal{O}$ habe direkte Produkte.

Dann sind die Funktoren $\text{Hom}_{\Gamma}(F, \star) : \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{V}\text{Men}$ mit direkten Produkten vertauschbar, d.h. das Paar $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^{\Gamma}$ genügt den Bedingungen i.) und ii.) von 6.2.

Beweis :

Seien $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O})$, $A_{\lambda} \in \mathcal{O}\mathcal{O}$, $\lambda \in \Lambda$, $p_{\lambda} : \prod_{\lambda} A_{\lambda} \longrightarrow A_{\lambda}$ die Projektionen und $f_{\lambda} \in \text{Hom}_{\Gamma}(F, A_{\lambda})$.

Für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ ist dann $f_{\lambda}(C) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(FC, A_{\lambda})$, woraus die eindeutige Existenz von Morphismen $f(C) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(FC, \prod_{\lambda} A_{\lambda})$ mit $p_{\lambda}f(C) = f_{\lambda}(C)$, $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$, folgt.

Dann ist $f := (f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \in \text{Hom}_{\Gamma}(F, \prod_{\lambda} A_{\lambda})$, und zwar der einzige Morphismus mit $p_{\lambda}f = f_{\lambda}$, q.e.d..

Entsprechend geben wir Bedingungen dafür an, daß das Paar $(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^P$ der Bedingung iii.) von 6.2 genügt.

Behauptung 7.3 :

Zu jedem $A \in \mathcal{O}\mathcal{O}$ existiere eine cofinale Teilmenge $E(A) \in \mathcal{U}$ von Epimorphismen aus $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, \cdot)$ derart, daß jedes $a \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, \cdot)$ in der Gestalt $a = ia'$ mit $a' \in E(A)$ und einem Monomorphismus i faktorisiert werden kann.

Weiter sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- i.) In $\mathcal{O}$ gibt es direkte Summen, d.h. für jede Familie $(A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ von Objekten aus $\mathcal{O}\mathcal{O}$, $\Lambda \in \mathcal{U}$, existiert $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$.
- ii.) Für jede Familie $(A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$, $\Lambda \in \mathcal{U}$, von Objekten $A_{\lambda} \in \mathcal{O}\mathcal{O}$ existiert eine Menge $M((A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}) \in \mathcal{U}$ von Familien $(i_{\lambda}: A_{\lambda} \rightarrow A)_{\lambda \in \Lambda}$ von Monomorphismen i_{λ} mit gleichem Zielderart, daß Folgendes gilt:

Für jede solche Familie $(j_{\lambda}: A_{\lambda} \rightarrow A')_{\lambda \in \Lambda}$ existiert eine Familie $(i_{\lambda}: A_{\lambda} \rightarrow A)_{\lambda \in \Lambda} \in M((A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$ und ein Monomorphismus i mit $j_{\lambda} = i_{\lambda}$ für $\lambda \in \Lambda$ so, daß für alle $A'' \in \mathcal{O}\mathcal{O}$ die Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, A'') \ni f \rightarrow (fi_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A_{\lambda}, A'')$ injektiv ist. Dann genügt das Paar $(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^P$ der Bedingung iii.) von 6.2.

Beweis :

Zu jedem $a \in \mathcal{M}\mathcal{O}$ seien $i(a)$ ein Monomorphismus und $e(a)$ ein Epimorphismus aus $E(Qa)$ mit $a = i(a)e(a)$.

- i.) Mit den Bezeichnungen von 7.1 seien für $F \in \mathcal{O}\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}^*(F, \cdot)$ $f^+ := (f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}}: \bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} FC \rightarrow Zf$. Dann ist $f^{\circ} := (e(f^+)a(F, C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(F, Z e(f^+))$, da $(i(f^+)e(f^+)a(F, C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} = (f^+a(F, C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} = (f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} = f$ gilt und da $i(f^+)$ Monomorphismus ist. f° ist Epimorphismus, da $e(f^+)$ Epimorphismus und die kanonische Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} FC, A) \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(FC, A)$, $A \in \mathcal{O}\mathcal{M}$, bijektiv sind.

Es gilt $f = i(f^+)f^\circ$. Die Menge $\{f^\circ \mid f \in \text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)\}$ ist also eine cofinale Teilmenge von Epimorphismen von $\text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)$; sie liegt in $\mathcal{U}$, da $E(\bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} FC) \in \mathcal{U}$ ist.

Damit erfüllt $(\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}), \mathcal{A})^\Gamma$ die Bedingung iii.) von 6.2. ii.) Seien wieder $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ und $f \in \text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)$.

Wir wählen nach ii.) eine Familie $(j(f, C): \text{Ze}(f(C)) \longrightarrow A(f))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}}$ aus $M((\text{Ze}(f(C)))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}})$ und einen Monomorphismus $k(f)$ so aus, daß $i(f(C)) = k(f)j(f, C)$, $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$, gilt und daß die kanonische Abbildung $\text{Hom}(A(f), A) \longrightarrow \prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \text{Hom}(\text{Ze}(f(C)), A)$ für alle $A \in \text{O}\mathcal{A}$ injektiv ist.

Da $k(f)$ Monomorphismus, $f \in \text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)$ und $f(C) = k(f)j(f, C)e(f(C))$ für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$ sind, ist $f^\circ := (j(f, C)e(f(C)))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \in \text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)$, und es gilt $f = k(f)f^\circ$.

Die Menge $\{f^\circ \mid f \in \text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)\}$ ist damit wieder cofinal in $\text{Hom}_\Gamma^*(F, \cdot)$ und außerdem auch Element von $\mathcal{U}$, da $\mathcal{O}\mathcal{L}$, $E(FC)$, $C \in \mathcal{O}\mathcal{L}$, und $M((\text{Ze}(f(C)))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}})$ Elemente von $\mathcal{U}$ sind.

Die Morphismen f° sind Epimorphismen, da die $e(f(C))$ Epimorphismen und für alle $A \in \text{O}\mathcal{A}$ die kanonischen Abbildungen

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A(f), A) \longrightarrow \prod_{C \in \mathcal{O}\mathcal{L}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Ze}(f(C)), A) \text{ injektiv ist.}$$

Wiederum haben wir also iii.) von 6.2 verifiziert.

Bemerkungen 7.4 :

1.) Der Beweis von 7.3 zeigt, daß man bei festem $\mathcal{L}$ die Bedingungen i.) und ii.) von 7.3 nicht für beliebige $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$, sondern nur für $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{O}\mathcal{L}|$ voraussetzen kann, um die Existenz von $\overline{\mathcal{L}}_\Gamma(\mathcal{A})$ zu beweisen.

2.) Die Bedingung ii.) der vorigen Behauptung dient vor allem dazu, die Bedingung i.) zu verifizieren.

3.) Wieder im wesentlichen für Kategorien von Mengen mit Struktur ist das folgende Kriterium zur Verifikation von 7.3, ii.) geeignet.

i.) Es gebe eine Abbildung $\varepsilon : 0\mathcal{O} \rightarrow 0\mathcal{U}$ Men mit den Eigenschaften von 6.3, i.).

ii.) Zu jeder Familie $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\Lambda \in \mathcal{U}$, von Objekten aus $0\mathcal{O}$ gebe es eine Menge $U((A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \in \mathcal{U}$ derart, daß für jede Familie $(i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Monomorphismen mit gleichem Ziel und $Q i_\lambda = A_\lambda$ eine ebensolche Familie $(j_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und ein Monomorphismus i mit $i_\lambda = i j_\lambda$, $|\varepsilon(Qi)| \leq |U((A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})|$ und so, daß für alle $A \in 0\mathcal{O}$ die Abbildung $\text{Hom}_\alpha(Qi, A) \ni f \rightarrow (f j_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_\lambda \text{Hom}_\alpha(A_\lambda, A)$ injektiv ist, existieren.

Dann genügt $\mathcal{O}$ der Bedingung ii.) von 7.3.

Der Beweis verläuft analog zu dem von 6.3.

Als Folgerung aus den vorangehenden Resultaten erhält man den

Satz 7.5 :

i.) In $\mathcal{O}$ gebe es direkte Produkte.

ii.) Zu jedem $A \in 0\mathcal{O}$ existiere eine in $\text{Hom}_\alpha(A, \cdot)$ cofinale Teilmenge $E(A)$ von Epimorphismen derart, daß jeder Morphismus $a \in M\mathcal{O}$ in der Gestalt $a = i a'$ mit einem Monomorphismus i und $a' \in E(Qa)$ faktorisiert werden kann.

iii.) In $\mathcal{O}$ gebe es direkte Summen, oder $\mathcal{O}$ genüge der Bedingung ii.) von 7.3.

Dann existieren die Funktoren $\overline{\mathcal{I}}_p(\mathcal{O})$, $\mathcal{L}$ eine kleine Kategorie, $\Gamma \subset M\mathcal{L}$.

Der Beweis folgt aus den vorigen Ergebnissen und 6.2.

Folgerung 7.6 :

Erfüllt $\mathcal{O}$ zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 7.5 die zu ii.) duale Voraussetzung ii.)*, so existieren auch die Funktoren $\overline{\mathcal{I}}_p(\mathcal{O})$.

Beweis :

Die Existenz der $\vec{\mathcal{I}}_p(\mathcal{O})$ impliziert insbesondere die Existenz direkter Summen ,d.h. die zu i.) von 7.5 duale Bedingung. Die Gültigkeit der zu ii.) dualen Bedingung haben wir ausdrücklich vorausgesetzt.

Da in $\mathcal{O}$ direkte Produkte existieren, gilt auch die zu iii.) duale Bedingung.

Die $\vec{\mathcal{I}}_p(\mathcal{O})$ existieren also auf Grund des zu 7.5 dualen Satzes.

Bemerkungen 7.7 :

1.) $\mathcal{O}$ genügt den beiden Bedingungen ii.) und ii.)^{*} des Satzes 7.5, wenn

1.) jeder Morphismus $a \in M\mathcal{O}$ in der Gestalt $a=ie$ mit einem Monomorphismus i und einem Epimorphismus e faktorisiert werden kann,

ii.) es eine Abbildung $\varepsilon : \mathcal{O}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}\mathcal{U}Men$ mit den in 6.3, i.) geforderten Eigenschaften gibt und

iii.) für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{O}$ eine Menge $U(A) \in \mathcal{U}$ so existiert, daß für alle Monomorphismen i aus $M\mathcal{O}$ und alle Epimorphismen e aus $M\mathcal{O}$ $|\varepsilon(Qi)| \leq |U(Zi)|$ bzw. $|\varepsilon(Ze)| \leq |U(Qe)|$ gilt.

Diese Annahmen sind z.B. erfüllt für die Kategorien $Men, Punkt, sep.Top., Grp, usw.$

2.) Die vorangehenden Ergebnisse gelten für $funkt$ ebenso wie für $Funkt$.

3.) Beispiele

1.) Wir wenden 7.5 z.B. auf die Kategorie $\mathcal{U}Top$ der topologischen Räume an. Wir verifizieren i.), ii.) und iii.) von 7.5:

i.) ist offenbar erfüllt.

ii.) $\varepsilon := \vee_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}\mathcal{U}Top \rightarrow \mathcal{O}\mathcal{U}Men$ ist eine Abbildung mit den Eigenschaften von 6.3, i.). Jede stetige Abbildung a läßt sich in der Form $a=ia'$ faktorisieren, wobei i die Injektion von $a(Qa)$, versehen mit der induzierten Topologie, in Za und a' die kanonische Surjektion von Qa auf $a(Qa)$ sind. Es gilt

$|\varepsilon(a(Qa))| \leq \min(|\varepsilon(Qa)|, |\varepsilon(Za)|)$, woraus nach 6.3 ii.) und ii.)^{*} von 7.5 folgen.

iii.) Zu jeder Familie $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von topologischen Räumen sei $U((A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon(A_\lambda)$. Sei $(i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von stetigen injektiven Abbildungen mit gleichem Ziel A und $Q i_\lambda = A_\lambda$. Sind i die kanonische Injektion von $\bigcup_{\lambda} i_\lambda(Q i_\lambda)$, versehen mit der induzierten Topologie, in A und j_λ die eindeutig bestimmten stetigen Abbildungen mit $i j_\lambda = i_\lambda$, so ist für alle topologischen Räume B $\text{Hom}_{\text{Top}}(A, B) \longrightarrow \prod_{\lambda} \text{Hom}_{\text{Top}}(A_\lambda, B)$ injektiv, und es gilt $|\varepsilon(Qi)| \leq \sum_{\lambda} |\varepsilon(Qi_\lambda)| = |U((A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})|$. Auf Grund von 7.7,3) gilt dann auch die Bedingung iii.) in 7.5.

Also existieren alle Funktoren $\mathcal{Z}_r(\text{Top})$ und $\mathcal{Z}_r(\text{Top})$.

ii.) Wir geben eine explizite Darstellung von $\text{Diffcok}_{\text{Men}}$.

Die Existenz von $\text{Diffcok}_{\text{Men}}$ folgt aus 7.5.

Sei $(f, g) \in \text{ODiffMorph Men}$. Auf $M := Zf = Zg$ definieren wir eine Relation $R := R_{f, g}$ durch $(R(x, y) \iff \text{Es gibt ein } z \in Qf = Qg \text{ mit } x = f(z) \text{ und } y = g(z))$. Sei R^* die von R erzeugte Äquivalenzrelation auf Zf , d.h. $(R^*(x, y) \iff \text{Es gibt eine Folge } x = x_1, \dots, x_n = y \text{ in } M \text{ derart, daß für alle } i=2, \dots, n \text{ } x_{i-1} = x_i \text{ oder } R(x_i, x_{i-1}) \text{ gelten.})$ Sei $\vee$ die kanonische Surjektion von $Zf = M$ auf $M \text{ mod } R^*$.

Wir bemerken, daß die Abbildungen $(M, R) \longrightarrow (M, R^*)$ und $(M, R^*) \longrightarrow M \text{ mod } R^*$ selbst wieder universelle Funktoren sind, deren Existenz aus den vorangehenden Existenzsätzen folgt.

Wir zeigen schließlich, daß die Zeile

$$Qf = Qg \xrightarrow[\vartheta]{f} Zf = Zg \xrightarrow{\vee} Zf \text{ mod } R^* \text{ exakt ist, woraus } Zf \text{ mod } R^* \cong \text{Diffcok}_{\text{Men}}(f, g) \text{ folgt.}$$

Jedenfalls impliziert die Beziehung $(R \supset R^*)$, daß $\vee f = \vee g$ ist.

Gilt $hf = hg$ für eine Abbildung h , so folgen $(R \supset R_h)$

$(R_h(x, y) : \iff h(x) = h(y))$ und daher auch $(R^* \supset R_h)$, da R^* die

universelle Äquivalenzrelation mit $(R \triangleright R^*)$ ist. Also gilt $(R^*(x,y) \triangleright h(x)=h(y))$, und deshalb läßt sich h eindeutig $\vee$ über faktorisieren, eindeutig deshalb, weil $\vee$ surjektiv ist.

iii) Wir geben ebenso ein Beispiel für die Anwendung der Behauptung 7.1.

Seien $\mathcal{L}$ eine kleine Kategorie und Γ ein Unterhalbgruppoid von $M\mathcal{L}$, das alle Identitäten von $M\mathcal{L}$ enthält und nach oben gefiltert ist, d.h., daß zu jedem Paar $(\gamma, \delta) \in \Gamma \times \Gamma$ mit $Q\gamma = Q\delta$ ein Paar $(\gamma', \delta') \in \Gamma \times \Gamma$ mit $\gamma'\gamma = \delta'\delta$ existiert.

Die letzte Voraussetzung ist auch äquivalent damit, daß jedes Diagramm



mit endlich vielen Basispunkten und Morphismen aus Γ zu einem kommutativen Dreieck



mit Morphismen aus Γ ergänzt werden kann.

Wir berechnen $\vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\text{Men})$.

In der Kategorie $\mathcal{U}(\text{Men})$ ist $\oplus = \cup$ die disjunkte Vereinigung.

Mit den Bezeichnungen der Behauptung 7.1 ist für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \text{Men})$

$$\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} FQ\gamma \xrightarrow[\substack{f := (a(F, Q\gamma))_{\gamma \in \Gamma} \\ g := (a(F, Z\gamma)F\gamma)_{\gamma \in \Gamma}}]{\substack{f := (a(F, Q\gamma))_{\gamma \in \Gamma} \\ g := (a(F, Z\gamma)F\gamma)_{\gamma \in \Gamma}}} \bigoplus_{c \in \text{OL}} FC \xrightarrow{\text{diffcoo}_{\text{Men}}(f,g)} \text{Diffcoo}_{\text{Men}}(f,g)$$

exakt mit $\text{Diffcoo}_{\text{Men}}(f,g) \cong \vec{\mathcal{L}}_\Gamma(\text{Men})F$.

Identifizieren wir FC mit $a(F, C)(FC)$ und ist $R := R_{(f,g)}$ die von (f,g) auf $\bigoplus_{c \in \text{OL}} FC$ induzierte Relation (s.ii.), so gilt für

$x, y \in \bigoplus_{c \in \text{OL}} FC$ $R(x,y)$ genau dann, wenn ein $\gamma \in \Gamma$ mit $x = (F\gamma)(y)$ existiert.

Ist R^* die von R erzeugte Äquivalenzrelation auf $\bigoplus_{c \in \text{OL}} FC$, so gilt

$R^*(x,y)$ offenbar insbesondere dann, wenn γ und δ aus Γ mit $*$) $(F\gamma)(x) = (F\delta)(y)$ existieren. Da Γ multiplikativ abgeschlossen und nach oben gefiltert ist und alle Identitäten von $M\mathcal{L}$ enthält,

definiert aber *) schon eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \text{FC}$ mit $(R \succ \sim \succ R^*)$. Also gilt $\sim = R^*$ wegen der Universalität von R^* bezüglich $(R \succ R^*)$. Es ist also

$$\text{Diffcock}_{\text{Men}}(f, g) \cong \bigoplus_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \text{FC} / \sim \cong \vec{\mathcal{I}}_P(\text{Men})F.$$

Man erhält als Spezialfall die übliche Konstruktion des direkten Limes von Mengen über nach oben gefilterten Indexmengen.

iv.) Sei Struk eine algebraische Strukturart über einer Hauptbasismenge, welche vollständig durch ein inneres Verknüpfungsgesetz $\circ$ beschrieben wird. $\mathcal{O}$ charakterisiere die zugehörigen Morphismen.

Sind $\mathcal{I}$ speziell eine geordnete, filtrierte Indexmenge und $\Gamma = M\mathcal{I}$, so existiert der Funktor $\vec{\mathcal{I}}_P(\mathcal{U} \text{Struk}^{\mathcal{O}})$, und es gilt $\forall e \vec{\mathcal{I}}_P(\mathcal{U} \text{Struk}^{\mathcal{O}}) \cong \vec{\mathcal{I}}_P(\mathcal{U} \text{Men}) \circ \forall e \mathcal{I}$, wobei $\forall e: \mathcal{U} \text{Struk}^{\mathcal{O}} \rightsquigarrow \mathcal{U} \text{Men}$ der Vernachlässigungsfunktor ist.

Der Beweis ist klar.

Die Behauptung gilt auch für kompliziertere algebraische Strukturen mit mehreren Hauptbasismengen und Hilfsbasismengen, mehreren äußeren und inneren Verknüpfungsgesetzen und zusätzlichen Axiomen.

§ 8. Vertauschbarkeit von Funktoren.

Gegeben seien ein $m+1$ -Tupel $(\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m)$ direkt verbundener Kategorien, Funktoren $S_i: \mathcal{O}_{i-1} \rightsquigarrow \mathcal{O}_i$ und funktorielle Morphismen

$$s_i: \text{id}_{\mathcal{O}_{i-1}} \longrightarrow S_i$$

$$\text{Für alle } 0 \leq i < j \leq m \text{ seien } S_{ji} := \begin{cases} S_j \circ \dots \circ S_{i+1} & \text{für } i < j \\ \text{id}_{\mathcal{O}_i} & \text{für } i = j \end{cases}$$

und $s_{ji}: \text{id}_{\mathcal{O}_i} \longrightarrow S_i$ der durch die Beziehungen

$$s_{ji}(A) := \begin{cases} s_j(S_{j-1,i}(A) \circ \dots \circ s_{i+1}(A)) & \text{für } i < j \\ 1_A & \text{für } i = j \end{cases} \quad A \in \mathcal{O}_i$$

definierte funktorielle Morphismus.

Wir geben in diesem Paragraphen notwendige Bedingungen dafür an, daß S_{mc} ein universeller Funktor von $(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_m)$ mit dem kanonischen

Morphismus s_{m0} ist. Als Spezialfall erhalten wir Ergebnisse über die Vertauschbarkeit von Funktoren.

Wir betrachten wieder nur Funktoren in einer Variablen auf Grund der Behauptung 1.6.

Der folgende Satz scheint alle wichtigen Anwendungen zu umfassen.

Satz 8.1 :

In der oben angegebenen Situation sind folgende Aussagen äquivalent:

i.) a) $(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_m)$ ist universell direkt verbunden, und s_{m0} ist ein zugehöriger universeller Funktor mit dem kanonischen Morphismus s_{m0} .

b) Für alle $i=1, \dots, m-1, A_0 \in \mathcal{O}\mathcal{O}_0$ und $A_m \in \mathcal{O}\mathcal{O}_m$ ist $\text{Hom}(s_i(S_{i-1} A_0), A_m)$ injektiv.

ii.) Für alle $i=1, \dots, m, A_0 \in \mathcal{O}\mathcal{O}_0$ und $A_m \in \mathcal{O}\mathcal{O}_m$ sind die Abbildungen $\text{Hom}(s_i(S_{i-1} A_0), A_m)$ bijektiv.

Beweis :

ii.) $\supset$ i.) Für $A_0 \in \mathcal{O}\mathcal{O}_0$ und $A_m \in \mathcal{O}\mathcal{O}_m$ ist wegen

$$s_{m0}(A_0) = s_m(S_{m-1} A_0) \circ \dots \circ s_1(A_0)$$

$$*) \text{Hom}(s_{m0}(A_0), A_m) = \text{Hom}(s_1(A_0), A_m) \circ \dots \circ \text{Hom}(s_m(S_{m-1} A_0), A_m)$$

bijektiv, da nach ii.) alle Faktoren dieses Produktes bijektiv sind. Also ist i.) a) erfüllt, und b) gilt offenbar.

i.) $\supset$ ii.) Aus der Gleichung *) und a) folgt, daß auch

$\text{Hom}(s_m(S_{m-1} A_0), A_m)$ injektiv ist, d.h. daß b) auch im Fall $i=m$ erfüllt ist.

Aus b) folgt nach Definition von s_{j1} weiterhin, daß für alle $0 < i < j < m, A_0 \in \mathcal{O}\mathcal{O}_0$ und $A_m \in \mathcal{O}\mathcal{O}_m$ auch

$$\text{Hom}(s_{j1}(S_{j-1} A_0), A_m) = \text{Hom}(s_{i+1}(S_{i0} A_0), A_m) \circ \dots \circ \text{Hom}(s_j(S_{j-1} A_0), A_m)$$

injektiv ist.

Wir zeigen schließlich, daß die Abbildungen $\text{Hom}(s_i(S_{i-1} A_0), A_m)$ surjektiv sind.

Sei also $f \in \text{Hom}_{(\alpha_{i-1}, \alpha_m)}(S_{i-1} A_0, A_m)$. Dann ist $f s_{i-1} (A_0)$ aus $\text{Hom}_{(\alpha_{i-1}, \alpha_m)}(A_0, A_m)$, also gibt es nach a) genau ein g aus $\text{Hom}_{\alpha_m}(S_{m-1} A_0, A_m)$ mit $g s_{m-1} (A_0) = f s_{i-1} (A_0)$, also $g s_{m-1} (S_{i-1} A_0) s_{i-1} (A_0) = f s_{i-1} (A_0)$, d.h.

$$\text{Hom}(s_{i-1} (A_0), A_m)(g s_{m-1} (S_{i-1} A_0)) = \text{Hom}(s_{i-1} (A_0), A_m)(f).$$

Da $\text{Hom}(s_{i-1} (A_0), A_m)$ nach obiger Bemerkung injektiv ist, folgen

$$f = g s_{m-1} (S_{i-1} A_0) = g s_{m-1} (S_i A_0) s_i (S_{i-1} A_0) =$$

$\text{Hom}(s_i (S_{i-1} A_0), A_m)(g s_{m-1} (S_i A_0))$; $\text{Hom}(s_i (S_{i-1} A_0), A_m)$ ist also auch surjektiv, q.e.d..

Bemerkungen 8.2 :

- 1.) Die Bedingung, daß $\text{Hom}(s_m(S_{m-1} A_0), A_m)$ bijektiv ist, ist immer dann erfüllt, wenn (α_{m-1}, α_m) universell direkt verbunden ist mit dem universellen Funktor $S_m : \alpha_{m-1} \rightsquigarrow \alpha_m$ und dem kanonischen Morphismus $s_m : \text{id}_{\alpha_{m-1}} \rightarrow S_m$.
- 2.) Den vorigen Satz werden wir vor allem dann anwenden, wenn alle Teilpaare (α_{i-1}, α_i) , $i=1, \dots, m$, universell direkt verbunden sind mit den universellen Funktoren $S_i : \alpha_{i-1} \rightsquigarrow \alpha_i$ und den kanonischen Morphismen $s_i : \text{id}_{\alpha_{i-1}} \rightarrow S_i$.
- 3.) Die Implikation ii.) $\supset$ i.) kann insbesondere als Existenzsatz für universelle Funktoren aufgefaßt werden.

Folgerung 8.3 :

Das Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ direkt verbundener Kategorien lasse sich einbetten in ein $m+1$ -Tupel $(\alpha_0 = \mathcal{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_m = \mathcal{B})$ und in ein $n+1$ -Tupel $(\beta_0 = \mathcal{A}, \beta_1, \dots, \beta_n = \mathcal{B})$. $S_i : \alpha_{i-1} \rightsquigarrow \alpha_i$ und $T_j : \beta_{j-1} \rightsquigarrow \beta_j$ seien Funktoren und $s_i : \text{id}_{\alpha_{i-1}} \rightarrow S_i$, $t_j : \text{id}_{\beta_{j-1}} \rightarrow T_j$ funktorielle Morphismen.

Sind für beide Tupel $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ und $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ die äquivalenten Bedingungen i.) und ii.) von 8.1 erfüllt, so gilt

$$S_m \circ \dots \circ S_1 \cong T_n \circ \dots \circ T_1.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der univer-

sellen Funktoren bis auf Isomorphie.

Diese Folgerung ist in Spezialfällen nichts weiter als die Vertauschbarkeit von Funktoren (s.u.).

Wegen der besonderen Bedeutung geben wir einen Spezialfall von 8.1 noch explizit im Fall direkt verbundener Tripel an.

Seien $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ ein Tripel direkt verbundener Kategorien, $S : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und $s : \text{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow S$ ein funktorieller Morphismus. Sei $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ universell direkt verbunden mit dem universellen Funktor $T : \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ und dem kanonischen Morphismus $t : \text{id}_{\mathcal{B}} \longrightarrow T$.

Behauptung 8.4 :

i.) Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ ist universell direkt verbunden mit $T \circ S$ als einem zugehörigen universellen Funktor und $(t(SA)s(A))_{A \in \mathcal{A}} : \text{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow T \circ S$ als kanonischem Morphismus und für alle $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$ ist $\text{Hom}(s(A), C)$ injektiv.

b) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \mathcal{C}$ ist $\text{Hom}(s(A), C)$ bijektiv.

ii.) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sei ebenfalls universell direkt verbunden mit dem universellen Funktor S und dem kanonischen Morphismus $s : \text{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow S$. $E : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ sei ein Funktor und $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ sei direkt verbunden mit der kanonischen Verbindung zu E .

Dann sind die äquivalenten Bedingungen von i.) erfüllt.

Beweis :

i.) folgt unmittelbar aus 8.1.

ii.) $\text{Hom}(s(A), C)$ ist hier genau dann bijektiv, wenn $\text{Hom}(s(A), EC)$ bijektiv ist. Dieses ist aber der Fall, da s der kanonische Morphismus zum universellen Funktor S ist.

Folgerung 8.5 :

i.) Sei $I = \{1, 2, 3, 4\}$ versehen mit der Ordnung $1 \leq 2 \leq 4, 1 \leq 3 \leq 4, i \leq i$ für alle $i \in I$, d.h. $I \cong \{1, 2\} \times \{1, 2\}$.

Sei $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ein System direkt verbundener Kategorien über I .

$S_{i,1} : \mathcal{O}_1 \rightsquigarrow \mathcal{O}_i$ ($i=2,3$) seien Funktoren und $s_i : \text{id}_{\mathcal{O}_1} \rightarrow S_{i,1}$ ($i=2,3$) funktorielle Morphismen. Die beiden Teilpaare $(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_4)$ ($i=2,3$) seien universell direkt verbunden mit den universellen Funktoren $S_{4,i} : \mathcal{O}_i \rightsquigarrow \mathcal{O}_4$ und den kanonischen Morphismen $s_{4,i}$.

Genügen dann die zwei Teiltripel $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_4)$ und $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4)$ den äquivalenten Bedingungen von i.) in 8.4, so ist das Diagramm

$$*) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{S_{2,1}} & \mathcal{O}_2 \\ S_{3,1} \downarrow & & \downarrow S_{4,2} \\ \mathcal{O}_3 & \xrightarrow{S_{4,3}} & \mathcal{O}_4 \end{array}$$

bis auf Isomorphie kommutativ.

ii.) $*)$ ist insbesondere dann bis auf Isomorphie kommutativ, wenn die $S_{i,1}$ ($i=2,3$) ebenfalls universelle Funktoren zu $(\mathcal{O}_4, \mathcal{O}_i)$ und die $S_{4,i}$ adjungierte Funktoren zu Funktoren $E_i : \mathcal{O}_4 \rightsquigarrow \mathcal{O}_i$ sind, derart daß die Verbindungen von $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_4)$ ($i=2,3$) die kanonischen zu E_2 bzw. E_3 sind.

Der Beweis dieser Folgerung ergibt sich aus den vorangehenden Ergebnissen.

Wir wenden die vorigen Resultate speziell auf Systeme direkt verbundener Kategorien an, in denen Funktorkategorien auftreten.

Seien $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ ein Paar direkt verbundener Kategorien mit dem universellen Funktor S und dem kanonischen Morphismus s .

Seien $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie und $\Gamma \subset M \mathcal{I}$.

Die Tripel $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O}), \mathcal{O}, \mathcal{L})^\Gamma$ und $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O}), \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{L}), \mathcal{L})^\Gamma$ lassen sich auf triviale Weise zu einem System $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ (I wie in 8.5) zusammenfassen, indem man $\mathcal{O}_1 := \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{O})$, $\mathcal{O}_2 := \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{L})$, $\mathcal{O}_3 := \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_4 := \mathcal{L}$ setzt. Seien $S_{\mathcal{I}}$ bzw. $s_{\mathcal{I}}$ die Fortsetzungen von S bzw. s auf $\text{Funkt}(\mathcal{I}, \cdot)$.

Behauptung 8.6 :

Der Funktor $\overline{S}_{\Gamma}(\mathcal{L})$ existiere. Dann genügt das Tripel

$(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{L}), \mathcal{L})^\Gamma$ mit den Funktoren
 $S_{\mathcal{I}} : \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{L})$ und $\overrightarrow{\mathcal{I}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$ und den Mor-
 phismen $s_{\mathcal{I}}$ bzw. $\overrightarrow{c}_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$ den äquivalenten Bedingungen von i.)
 in 8.4.

Beweis :

Wir haben zu zeigen, daß für alle $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ und $B \in \text{OL}$
 $\text{Hom}(s_{\mathcal{I}}(F), B)$ bijektiv ist.

Sei also $f = (f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(F, B)$. Für alle $C \in \mathcal{O}\mathcal{I}$ gibt es
 dann genau ein $b(C) \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(SFC, B)$ mit $b(C)s(FC) = f(C)$. Da

$(f(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(F, B)$ ist, folgt wie in 4.1

$b := (b(C))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}} \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(SF, B)$. Wegen $s_{\mathcal{I}}(F) = (s(FC))_{C \in \mathcal{O}\mathcal{I}}$ resultiert
 $bs_{\mathcal{I}}(F) = f$. Daß b der einzige Morphismus mit dieser Eigenschaft
 ist, folgt daraus, daß die $b(C)$ die einzigen Morphismen mit
 $f(C) = b(C)s(FC)$ sind.

Also ist $\text{Hom}(s_{\mathcal{I}}(F), B)$ bijektiv.

Folgerung 8.7 :

In der obigen Situation mögen die Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{I}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ und $\overrightarrow{\mathcal{I}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$
 existieren.

i.) Ist für alle $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ und $B \in \text{OL}$ $\text{Hom}(\overrightarrow{c}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})(F), B)$
 bijektiv, so gilt *) $S \circ \overrightarrow{\mathcal{I}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) \cong \overrightarrow{\mathcal{I}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) \circ S_{\mathcal{I}}$.

ii.) Die Voraussetzung von i.) ist insbesondere dann erfüllt,
 wenn S adjungierter Funktor zu einem Funktor $E : \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ ist.

Der Beweis folgt aus 8.4 und 8.6.

Zur Charakterisierung der Beziehung *) verwendet man auch die
 ungenaue, aber einprägsame Sprechweise : "S ist mit $\overrightarrow{\mathcal{I}}_{\mathcal{P}}$ vertauschbar."

Wir betrachten jetzt noch den Spezialfall der Folgerung 8.7, bei
 dem $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ selbst schon die Gestalt $(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \mathcal{A})^{\Delta}$ hat.

Seien also $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ kleine Kategorien mit
 $\Gamma \subset M\mathcal{I}$ und $\Delta \subset M\mathcal{J}$.

Auf Grund von I, 6.1 identifizieren wir die Tripel

$(\text{Funkt}(\mathcal{I} \times \mathcal{V}, \mathcal{O}), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^{\Gamma \times \Delta}$,
 $(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O})), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^{\Gamma \times \Delta}$ und
 $(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), \mathcal{O})^{\Gamma \times \Delta}$, und entsprechend
 mit $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{V}$ vertauscht.

Folgerung 8.8 :

Die Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O})$ und $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{O})$ mögen existieren.

Dann existieren auch die Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O}))$,

$\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}))$ und $\overrightarrow{\mathcal{Z} \times \mathcal{V}}_{\Gamma \times \Delta}(\mathcal{O})$, und es gilt

$$\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O}) \circ \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})) \approx \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{O}) \circ \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O})) \approx \overrightarrow{\mathcal{Z} \times \mathcal{V}}_{\Gamma \times \Delta}(\mathcal{O})$$

Beweis :

Wir bemerken zunächst, daß bei der oben verabredeten Identifizierung die Beziehungen *) jedenfalls sinnvoll sind.

Aus den Voraussetzungen und 4.3 folgt, daß $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{O}) \mathcal{Z}$ universeller

Funktor des Paares $(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O})), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}))^{\mathcal{M} \mathcal{Z} \times \mathcal{V}} =$

$(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})), \text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}))^{\mathcal{M} \mathcal{Z} \times \Delta}$ ist. Also existiert

$\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}))$, und es gilt $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\text{Funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})) \approx \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{O}) \mathcal{Z}$

Entsprechend existiert $\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\text{Funkt}(\mathcal{V}, \mathcal{O}))$.

Aus 8.6 resultiert, daß $\overrightarrow{\mathcal{Z} \times \mathcal{V}}_{\Gamma \times \Delta}(\mathcal{O})$ existiert und daß

$$\overrightarrow{\mathcal{Z} \times \mathcal{V}}_{\Gamma \times \Delta}(\mathcal{O}) \approx \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O}) \circ \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{O}) \mathcal{Z} \approx \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta}(\mathcal{O}) \circ \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}(\mathcal{O}) \mathcal{V} \text{ gilt, q.e.d.}$$

Bemerkungen 8.9 :

1.) Läßt man bei den Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma}$ die Argumente fort, so läßt

sich die Folgerung 8.8 in der einprägsamen Vertauschungsbeziehung

$$\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma} \circ \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta} \approx \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\Delta} \circ \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma} \approx \overrightarrow{\mathcal{Z} \times \mathcal{V}}_{\Gamma \times \Delta} \text{ fassen.}$$

2.) Die Folgerung 8.8 läßt sich induktiv sofort auf endlich viele

$\mathcal{I}$ verallgemeinern.

Sind also $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ kleine Kategorien und $\Gamma_i \subset \mathcal{M} \mathcal{I}_i, i=1, \dots, n$, so

gilt für jede Permutation π der Zahlen von 1 bis n

$$\overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma_1 \Gamma_2} \circ \dots \circ \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\Gamma_n \Gamma_n} \approx \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\pi(1) \Gamma_{\pi(1)}} \circ \dots \circ \overrightarrow{\mathcal{Z}}_{\pi(n) \Gamma_{\pi(n)}} \approx \overrightarrow{\mathcal{I}_1 \times \dots \times \mathcal{I}_n}_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n}$$

3.) Die vorigen Resultate gelten ebenso für funkt statt Funkt .

KAPITEL III : ANWENDUNGEN

§ 1. Äquivalenz von Funktorkategorien und Diagrammkategorien

Wir benutzen die Bezeichnungen von A. Grothendieck in [7], S. 130.

$\text{DS}\mathcal{U}$ sei folgende Kategorie:

$\text{ODS}\mathcal{U}$ bestehe aus allen Quadrupeln (I, ϕ, d, R) , wobei $S = (I, \phi, d)$, $d := (d_1, d_2) : \phi \rightarrow I \times I$, ein Diagrammschema im Sinne von [7] mit $I \in \mathcal{N}$ und $\{ \varphi \in \phi \mid d(\varphi) = (i, j) \} \in \mathcal{U}$ für $(i, j) \in I \times I$ und R eine Menge nicht-additiver Relationen auf S , d.h. eine Menge von Paaren zusammengesetzter Pfeile von ϕ , sind.

Ein Morphismus von (I, ϕ, d, R) in (I', ϕ', d', R') sei ein Paar $f = (f_I, f_\phi)$ einer Abbildung $f_I : I \rightarrow I'$ und einer Abbildung $f_\phi : \phi \rightarrow \phi'$ derart, daß für alle $\varphi \in \phi$ $df_\phi(\varphi) = (f_I \times f_I)(d\varphi)$ gilt und daß die triviale Fortsetzung von f_ϕ auf die Menge der Paare zusammengesetzter Pfeile R in R' abbildet.

Sei $E : \text{Kat}\mathcal{U} \rightsquigarrow \text{DS}\mathcal{U}$ der Funktor, der auf den Objekten durch die Zuordnung $\mathcal{A} \rightsquigarrow (O\mathcal{A}, M\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{A}})$ definiert ist, wobei $d_{\mathcal{A}}\varphi := (Q\varphi, Z\varphi)$, $\varphi \in M\mathcal{A}$, seien und

$$R_{\mathcal{A}} := \{ (\varphi_1, \dots, \varphi_m), (\psi_1, \dots, \psi_n) \mid \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_m = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_n, \varphi_i, \psi_j \in M\mathcal{A} \}.$$

Wir verbinden $(\text{DS}\mathcal{U}, \text{Kat}\mathcal{U})$ mit der kanonischen Verbindung zu E .

Für $(S, R) \in \text{ODS}\mathcal{U}$ und $\mathcal{A} \in \text{OKat}\mathcal{U}$ ist $\text{Hom}_{(\text{DS}\mathcal{U}, \text{Kat}\mathcal{U})}^E((S, R), \mathcal{A})$ die Menge aller Diagramme $D := (D_I, D_\phi)$ zum Schema S mit Werten in $\mathcal{A}$. Die analog zu $\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ definierte Kategorie mit den natürlichen Morphismen, deren Objektmenge gerade $\text{Hom}_{(\text{DS}\mathcal{U}, \text{Kat}\mathcal{A})}^E((S, R), \mathcal{A})$ ist, wird mit $\text{Diagr}((S, R), \mathcal{A}) = \mathcal{A}^{(S, R)}$ in [7] bezeichnet.

Der Isomorphismus der Kategorie aller kleinen $\mathcal{N}$ -Kategorien $\mathcal{A}$ mit $O\mathcal{A} \in \mathcal{N}$ und der Kategorie $\mathcal{N}$ Halb aller Halbgruppoides mit 1-Elementen und der Existenzsatz II, 6.2 zeigen, daß zu jedem $(S, R) \in \text{ODS}\mathcal{U}$ eine kleine $\mathcal{N}$ -Kategorie $\mathcal{K}(S, R)$ mit $O\mathcal{K}(S, R) \in \mathcal{N}$ und ein Diagramm $D(S, R) : (S, R) \rightsquigarrow \mathcal{K}(S, R)$ so existieren, daß man jedes Diagramm D von (S, R) in kleine $\mathcal{N}$ -Kategorie $\mathcal{A}$ mit $O\mathcal{A} \in \mathcal{N}$

eindeutig über $D(S, R)$ faktorisieren kann. Aus den folgenden Betrachtungen wird hervorgehend, daß man $\tilde{K}(S, R)$ als $\mathcal{V}$ -Kategorie wählen kann. Also ist $(DS\mathcal{V}, \text{Kat}\mathcal{V})^E$ universell direkt verbunden. Seien $\tilde{K}$ der zugehörige universelle Funktor und D der kanonische Morphismus.

Für alle $(S, R) \in ODS\mathcal{V}$ und alle Kategorien $\mathcal{A} \in OKat\mathcal{V}$ ist also $\text{Hom}(D(S, R), \mathcal{A}) : \text{Hom}_{\text{Kat}\mathcal{V}}(\tilde{K}(S, R), \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Hom}_{(DS\mathcal{V}, \text{Kat}\mathcal{V})^E}((S, R), \mathcal{A})$ bijektiv.

Wir zeigen nun, daß für alle $\mathcal{A} \in OKat\mathcal{V}$ diese bijektive Abbildung einen Isomorphismus der Kategorie $\text{Funkt}(\tilde{K}(S, R), \mathcal{A})$ auf die Kategorie $\text{Diagr}((S, R), \mathcal{A})$ induziert.

i.) Zunächst ist für $S = (I, \phi, d)$ $D(S, R)_I : I \longrightarrow O\tilde{K}(S, R)$ bijektiv.

Diese Abbildung ist nämlich surjektiv, da $D(S, R)$ Epimorphismus in $M(DS\mathcal{V}, \text{Kat}\mathcal{V})^E$ ist. $D(S, R)_I$ ist aber auch injektiv. Sei nämlich die Kategorie $\mathcal{A}$ definiert durch $0\mathcal{A} := I$ und für $i, i' \in I$ $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(i, i') := \text{Hom}_{\tilde{K}(S, R)}(D(S, R)_I(i), D(S, R)_I(i'))$. Die Verknüpfung sei die in $\tilde{K}(S, R)$ definierte. Man erhält ein Diagramm D in $\mathcal{A}$ zum Schema S mit Relationen R durch die Festsetzungen $D_I := \text{id}_I$ und $D_\phi(\varphi) := D(S, R)_\phi(\varphi)$. D läßt sich faktorisieren über $D(S, R)$, und D_I ist injektiv; also ist auch $D(S, R)_I$ injektiv.

ii.) Daraus, daß $D(S, R)$ Epimorphismus in $M(DS\mathcal{V}, \text{Kat}\mathcal{V})^E$ ist, folgt ebenfalls, daß das Halbgruppoid $M\tilde{K}(S, R)$ von $D(S, R)_\phi(\phi)$ erzeugt wird, d.h. das jedes Element von $M\tilde{K}(S, R)$ Produkt von Elementen der Form $D(S, R)_\phi(\varphi)$, $\varphi \in \phi$, und Identitäten ist.

iii.) Aus i.) und ii.) folgt nun auch, daß für $\mathcal{A} \in OKat\mathcal{V}$ der Isomorphismus

$\text{Hom}(D(S, R), \mathcal{A}) : \text{Hom}_{\text{Kat}\mathcal{V}}(\tilde{K}(S, R), \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Hom}_{(DS\mathcal{V}, \text{Kat}\mathcal{V})^E}((S, R), \mathcal{A})$ einen Isomorphismus $T : \text{Funkt}(\tilde{K}(S, R), \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Diagr}((S, R), \mathcal{A})$ induziert.

Für $F \in OFunkt(\tilde{K}(S, R), \mathcal{A})$ definieren wir natürlich

$TF := FD(S, R) = \text{Hom}(D(S, R), \mathcal{O})(F)$. Für $a = (a(K))_{K \in \mathcal{O}\tilde{R}(S, R)}$ aus $\text{MFunkt}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})$ sei $Ta := (a(D(S, R)_I(i)))_{i \in I}$. Es ist klar, daß Ta in $\text{Hom}_{\text{Diagr}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})}(TQa, Tza)$ liegt. T ist damit offenbar ein Funktor von $\text{Funkt}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})$ in $\text{Diagr}((S, R), \mathcal{O})$, und T_0 ist bijektiv, da $\text{Hom}(D(S, R), \mathcal{O})$ bijektiv ist.

Seien schließlich $D, D' \in \text{ODiagr}((S, R), \mathcal{O})$ und $a = (a(i))_{i \in I} \in \text{Hom}_{\text{Diagr}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})}(D, D')$, $F, F' \in \text{OFunkt}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})$ die eindeutig bestimmten Funktoren mit $FD(S, R) = D$ bzw. $F'D(S, R) = D'$ und $a' := (a(D(S, R)_I^{-1}(K)))_{K \in \mathcal{O}\tilde{R}(S, R)}$. Da $D(S, R)_I$ bijektiv ist, ist a' wohldefiniert, und offenbar ist $a'(K) = a(D(S, R)_I^{-1}(K))$ aus $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(FK, FK')$ für alle $K \in \mathcal{O}\tilde{R}(S, R)$.

Wir zeigen schließlich $a' \in \text{Hom}_{\text{Funkt}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})}(F, F')$. Offenbar ist dann $Ta' = a$, d.h. T_M ist ebenfalls bijektiv, da es natürlich injektiv ist, und T ist damit ein Isomorphismus.

Für $\varphi \in \Phi$ ist wegen $a \in \text{MDiagr}((S, R), \mathcal{O})$

$D'\varphi a(d_1\varphi) = a(d_2\varphi)D\varphi$. Daraus folgt aber unmittelbar, daß auch für alle $\varphi \in \Phi$ $(F'D(S, R)\varphi)a'(QD(S, R)\varphi) = a'(ZD(S, R)\varphi)(FD(S, R)\varphi)$ gilt.

Da die $D(S, R)\varphi, \varphi \in \Phi$, $M\tilde{R}(S, R)$ erzeugen, folgt, daß sogar für alle $k \in M\tilde{R}(S, R)$ $(F'k)a'(Qk) = a'(Zk)(Fk)$ gilt, d.h.

$a' \in \text{Hom}_{\text{Funkt}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})}(F, F')$, q.e.d..

Satz 1.1 :

Die bijektive Abbildung

$\text{Hom}(D(S, R), \mathcal{O}) : \text{Hom}_{\text{Kat}\mathcal{U}}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Hom}_{(\text{DS}\mathcal{U}, \text{Kat}\mathcal{U})}((S, R), \mathcal{O})$ induziert einen Isomorphismus der Kategorie $\text{Funkt}(\tilde{R}(S, R), \mathcal{O})$ auf die Kategorie $\text{Diagr}((S, R), \mathcal{O}) = \mathcal{O}^{(S, R)}$.

Ebenso erhält man das folgende Ergebnis. Seien $\text{DS}^a\mathcal{U}$ die analog zu $\text{DS}\mathcal{U}$ definierte Kategorie aller Diagrammschemata (I, Φ, d, R) mit beliebigen, d.h. auch additiven, Relationen R . Sei $\text{Kat}^a\mathcal{U}$ die analog zu $\text{Kat}\mathcal{U}$ definierte Kategorie aller additiven $\mathcal{U}$ -Kategorien $\mathcal{O}$ mit $0\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ und den additiven Funktoren als

Morphismen. $DS^a\mathcal{U}$ und $Kat^a\mathcal{V}$ verbindet man durch die Diagramme, die den Relationen R genügen.

Satz 1.2 :

Das Paar $(DS^a\mathcal{U}, Kat^a\mathcal{V})$ ist universell direkt verbunden.

Sind $\tilde{R}^a$ der zugehörige universelle Funktor und D^a der kanonische Morphismus, so induziert für $(S, R) \in ODS^a\mathcal{U}$ und $\mathcal{O} \in OKat^a\mathcal{V}$ die bijektive Abbildung

$Hom(D^a(S, R), \mathcal{O}) : Hom_{Kat^a\mathcal{V}}(\tilde{R}^a(S, R), \mathcal{O}) \longrightarrow Hom_{(DS^a\mathcal{U}, Kat^a\mathcal{V})}((S, R), \mathcal{O})$
einen Isomorphismus von $funkt(\tilde{R}^a(S, R), \mathcal{O})$ auf $Diagr((S, R), \mathcal{O})$.

Schließlich ist $(Kat\mathcal{U}, Kat^a\mathcal{V})$ kanonisch direkt verbunden mit der Verbindung zum Einbettungsfunktor $Kat^a\mathcal{V} \rightsquigarrow Kat\mathcal{U}$. Dieser hat einen adjungierten Funktor $\tilde{R}' : Kat\mathcal{U} \rightsquigarrow Kat^a\mathcal{V}$. Sei $D' : id_{Kat\mathcal{U}} \longrightarrow \tilde{R}'$ der kanonische Morphismus, d.h. für jede Kategorie $\mathcal{O} \in OKat\mathcal{U}$ ist $D'(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \rightsquigarrow \tilde{R}'\mathcal{O}$ ein Funktor.

Satz 1.3 :

Für jede Kategorie $\mathcal{L}$ und additive Kategorie $\mathcal{O}$ induziert die bijektive Abbildung $Hom(D'(\mathcal{L}), \mathcal{O})$ einen Isomorphismus von $funkt(\tilde{R}'\mathcal{L}, \mathcal{O})$ auf $Funkt(\mathcal{L}, \mathcal{O})$.

Analoge Resultate gelten für punktierte und K-additive Kategorien

Folgerungen 1.4 :

1.) Sind (I, ϕ, d, R) ein Diagrammschema mit Relationen aus $ODS\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{L}$ eine Kategorie, so sind $|O\tilde{R}(I, \phi, d, R)| = |I|$ bzw. auch $|O\tilde{R}^a(I, \phi, d, R)| = |I|$ im Fall additiver Relationen R bzw. $|O\tilde{R}'\mathcal{L}| = |O\mathcal{L}|$.

Insbesondere sind $\tilde{R}(I, \phi, d, R)$ ($\tilde{R}^a(I, \phi, d, R)$) bzw. $\tilde{R}'\mathcal{L}$ klein, falls (I, ϕ, d, R) bzw. $\mathcal{L}$ klein sind.

2.) Ist $\mathcal{O}$ eine additive (punktierte) $\mathcal{U}$ -Kategorie, so kann man sich bei der Untersuchung von Kategorien von Diagrammen mit Werten in $\mathcal{O}$ also auf Kategorien der Gestalt $funkt(\mathcal{L}, \mathcal{O})$ mit

additiven (punktieren) Kategorien $\mathcal{L}$ beschränken.

Insbesondere gibt es zu jedem Diagrammschema (S, R) mit nur einer Ecke einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Ring $A(S, R)$ derart, daß für jede additive Kategorie $\mathcal{A}$ die additiven Kategorien $\text{Diagr}((S, R), \mathcal{A})$ und $\text{funkt}(A(S, R), \mathcal{A})$ isomorph sind, wobei $A(S, R)$ als additive Kategorie mit einem Objekt aufgefaßt wird.

3.) Die vorigen Betrachtungen sind ebenso gültig, wenn wir "additiv" durch "K-additiv" ersetzen, K ein kommutativer Ring. Ist (S, R) wieder ein Diagrammschema mit nur einer Ecke und gegebenenfalls auch K-additiven Relationen R, so existiert demnach genau eine K-Algebra derart, daß für alle K-additiven Kategorien die Kategorien $\text{Diagr}((S, R), \mathcal{A})$ und $\text{funkt}(A(S, R), \mathcal{A})$ isomorph sind.

Ist $E_{\mathcal{A}}: \text{Diagr}((S, R), \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ der Einbettungsfunktor, so ist $\text{End } E \cong_{K\text{-Algebra}} \text{Mod } K$ $A(S, R)$. Dabei ist $\text{End } E \cong_{K\text{-Algebra}} \text{Mod } K$ die Endomorphismenalgebra des K-additiven Funktors $E \in \text{Mod } K$. Dieses letzte Resultat verdanke ich B. Pareigis.

4.) Beispiele

i.) Sei (I, ϕ, d, R) gegeben durch $I := \{i\}$, $\phi := \{\varphi_0\}$, $d(\varphi_0) := (i_0, i_0)$ und der additiven Relation $(\varphi_0, \varphi_0) = 0$.

Ist $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, so ist $\text{Diagr}((I, \phi, d, R), \mathcal{A})$ gerade die Kategorie der Objekte von $\mathcal{A}$ mit Differentiation. Bis auf Isomorphie ist $A := R^a(I, \phi, d, R)$ der Ring der dualen Zahlen, also ist die Kategorie der Objekte von $\mathcal{A}$ mit Differentiation isomorph zur Kategorie der A-Objekte von $\mathcal{A}$.

ii.) Sei K ein kommutativer Ring und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K. Wir ordnen $\mathfrak{g}$ auf kanonische Weise ein Diagrammschema (I, ϕ, d, R) zu:

Seien $|I| = 1$, $\phi := \mathfrak{g}$ und d trivial. Sei R gegeben durch die

K-additiven Relationen

$(g)+(g')=(g+g'), (g,g')-(g',g)=([g,g'])$ und $(kg)=k(g), k \in K, g, g' \in \mathcal{Y}$.

$K^a(I, \phi, d, R)$ ist isomorph zur einhüllenden assoziativen K-Algebra ${}_K \mathcal{Y}^e$ von ${}_K \mathcal{Y}$. Für jede K-additive Kategorie $\mathcal{O}$ ist also die Kategorie $\text{Diagr}((I, \phi, d, R), \mathcal{O})$ der Darstellungen von $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{O}$ isomorph zur Kategorie $\text{funkt}(\mathcal{Y}^e, \mathcal{O})$ der $\mathcal{Y}^e$ -Objekte von $\mathcal{O}$.

§ 2. Satelliten und abgeleitete Funktoren

1.) Die Kategorien $\mathcal{T}$ -verb^I $\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$

Wir betrachten zunächst nur Funktoren in einer Variablen. Wir geben später kurz an, wie sich das Gesagte auf Funktoren mehrerer Variablen übertragen läßt.

Seien $\mathcal{O}$ eine kleine additive Kategorie und $\mathcal{T}$ eine volle additive Unterkategorie von $\text{Morph } \mathcal{O}$ mit folgenden Eigenschaften:

i.) $\mathcal{O} \mathcal{T}$ besteht aus vollen Isomorphieklassen.

ii.) Der Funktor $\text{Cok} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{O}$ existiert.

Sei $\mathcal{L}$ eine additive Kategorie. Sei I ein nicht notwendig endliches Intervall nicht negativer ganzer Zahlen. Dann sei

$\mathcal{T}$ -verb^I $\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ folgende Kategorie:

$\mathcal{O} \mathcal{T}$ -verb^I $\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ bestehe aus allen Paaren $((T^i)_{i \in I}, (\delta_r^i)_{i \in I})$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $i \in I$ sei $T^i \in \mathcal{O} \text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$.

b) Für alle $i \in I$ mit $i+1 \in I$ sei $\delta_r^i : T^i \text{Cok} \rightarrow T^{i+1} \mathcal{Q}$ funktorieller Morphismus in $\text{Mfunkt}(\mathcal{T}, \mathcal{L})$, und

$T^i \mathcal{Z} \xrightarrow{T^i \text{Cok}} T^i \text{Cok} \xrightarrow{\delta_r^i} T^{i+1} \mathcal{Q} \xrightarrow{T^{i+1} \mathcal{J}_n} T^{i+1} \mathcal{Z}$ sei ein Komplex.

Sind $T=((T^i), (\delta_r^i))$ und $U=((U^i), (\delta_u^i))$ zwei Objekte aus

$\mathcal{O} \mathcal{T}$ -verb $\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$, so sei $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{-verb}^I \text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(T, U)$ die Menge aller

$(b^i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})}(T^i, U^i)$ derart, daß für alle $s \in \mathcal{O} \mathcal{T}$ und $i \in I$ mit $i+1 \in I$ $b^{i+1}(\mathcal{Q}s) \delta_r^i(s) = \delta_u^i(s) b^i(\text{Cok } s)$ gilt.

Die Verknüpfung von Morphismen sei komponentenweise definiert. Damit ist $\mathcal{T}$ -verb^I funkt($\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$) eine additive Kategorie, die Kategorie der $\mathcal{T}$ -verbundenen Folgen von Funktoren über I .

Ist J ein in I enthaltenes Intervall, so sei

$P^{J,I} : \mathcal{T}\text{-verb}^I \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}\text{-verb}^J \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ der Projektionsfunkt. Ist $|J|=1$, so identifizieren wir $\mathcal{T}\text{-verb}^J \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ mit $\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$. Vermöge $P^{I, \min I}$ ist

$(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}), \mathcal{T}\text{-verb}^I \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))$ direkt verbunden. Ist $I \cong I'$ in Men , so ist $(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}), \mathcal{T}\text{-verb}^I \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) \xrightarrow{P^{I, \min I}} \text{iso-morph zu } (\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}), \mathcal{T}\text{-verb}^{I'} \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) \xrightarrow{P^{I', \min I'}}$. Ohne Einschränkung sei daher jetzt I ein Intervall mit $\min I=0$.

Ist $(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}), \mathcal{T}\text{-verb}^I \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))$ universell direkt verbunden, so nennen wir den zugehörigen universellen Funktor S_I Satellitenfunkt. Ist $J \subset I$ mit $\min J=0$ und existiert S_I , so auch S_J und es ist $P^{J,I} S_I \cong S_J$, also ohne Einschränkung $P^{J,I} S_I = S_J$.

Existiert S_I und ist $i \in I$, so sei $P^{i,I} S_I = S_i$. Diese Definition ist sinnvoll, da S_i von I nicht abhängt. Für $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ heißt $S_i T$ der i -te Satellitenfunkt. von T . Die S_i hängen von $\mathcal{A}, \mathcal{L}$ und $\mathcal{T}$ ab, also $S_i = S_i(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$.

Existiere S_I und sei $s : \text{id}_{\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})} \rightarrow S_I$ der kanonische Morphismus. Sei $E := P^{0,I}$. Den Anschluß an die übliche Definition der Satelliten liefert folgende

Behauptung 2.1 :

$s_E : \text{id}_{\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})} \rightarrow ES$ ist Isomorphismus.

Beweis :

Das folgt aus II, 2.4. Seien nämlich T und T' aus $\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$.

Seien $W := S_I T = ((W^i), (\delta_W^i))$ und $W' := ((W'^i), (\delta_{W'}^i))$ aus $\mathcal{T}\text{-verb}^I \text{ funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ definiert durch $W'^0 := T'$, $W'^i := 0$ für $i \neq 0$ und $\delta_{W'}^i := 0$.

Offenbar sind $EW' = T'$ und $E(W, W')$ surjektiv, s_E also Isomorphismus.

Damit ist der Zusammenhang mit der üblichen Definition hergestellt. Ein Element $T := ((T^i), (\delta_T^i))$ aus $O\mathcal{T}\text{-verb}^I \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ heißt universeller $\mathcal{T}$ - δ -Funktorkomplex, falls $T \cong S_I T^\circ$ gilt.

Als Folgerung aus den Ergebnissen von II, §8 erhalten wir die Behauptung 2.2 :

Zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen sei $\mathcal{L}$ eine kleine Kategorie mit $\Gamma \subset M\mathcal{L}$. Der Satellitenfunktorkomplex $S_I(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$

und der Funktor $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{L}) : \text{funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$ mögen existieren.

i.) Dann existieren auch die Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))$ und $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{T}\text{-verb}^I \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))$, und zwar ist für $i \in I$

$\text{P}^{i,i} \overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{T}\text{-verb}^I \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) \cong \overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) \cdot \text{P}^{i,i} \mathcal{I}_I$.

ii.) Es ist $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{T}\text{-verb}^I \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) \circ (S_I)_I \cong S_I \circ \overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))$.

Beweis :

i.) Die Existenz von $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{L})$ impliziert nach II, 8.8 diejenige von $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))$, und zwar ist $\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) \cong \overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{L})_{\mathcal{A}}$, d.h. für $F \in O\text{funkt}(\mathcal{L}, \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L})) = O\text{funkt}(\mathcal{L} \times \mathcal{A}, \mathcal{L})$ und $A \in O\mathcal{A}$ ist $(\overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{L}))F)A \cong \overrightarrow{\mathcal{I}}_r(\mathcal{L})F(*, A)$. Daraus folgt dann leicht die Behauptung i.)

ii.) ist eine unmittelbare Folgerung aus II, 8.7, da S_I adjungierter Funktor ist.

Die vorige Behauptung enthält insbesondere den Satz 2.10 von [14].

Bemerkungen 2.3 :

1.) Existiert der Funktor $S_{\{0,1\}}$, so existieren auch die Funktoren S_I und S^I für alle Intervalle I bzw. natürlichen Zahlen i , und zwar ist $S^i \cong (S_{\{0,1\}}^1)^i$.

Aus diesem Grund beschränken wir uns bei den Existenzsätzen unten auf den Fall $I = \{0,1\}$.

2.) Entsprechende Ergebnisse gelten für Funktoren in mehreren Variablen. Man ersetze im wesentlichen in dem oben Gesagten das Intervall I durch das Produkt von sovielen Intervallen, wie die

Funktoren Variable haben. Die Satelliten eines Funktors bilden dann keine Folge mehr, sondern ein ganzes Gitter. Mutatis mutandis bleiben die Definitionen und Behauptungen die gleichen wie im Fall einer Veränderlichen.

2.) Existenz von Satelliten

Wir beschränken uns auf die Untersuchung des Funktors $S_{\{0,1\}}$.

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien additive Kategorien mit Cokernen und $\mathcal{T}$ eine volle Unterkategorie von $\text{Morph } \mathcal{A}$ wie in 1.). $\mathcal{A}$ sei klein. Für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{A}$ sei $\mathcal{T}(A) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \cdot) \cap \mathcal{T}$. $\mathcal{T}(A)$ ist prägeordnet mit der von $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \cdot)$ induzierten Präordnung.

Hilfssatz 2.4 :

Sei $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

i.) Seien $s, t \in \mathcal{O} \mathcal{T}$ und $a \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Qs, Qt)$ derart, daß $s \gg_t a$ (in $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Qs, \cdot)$). Dann gibt es genau einen Morphismus

$T_{ts}(a) : \text{Cok } T \text{ cok } s \longrightarrow \text{Cok } T \text{ cok } t$ derart, daß für alle a' mit $a' s = ta$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 T_{ts} & \xrightarrow{T \text{ cok } s} & T \text{ Cok } s & \xrightarrow{\text{cok } T \text{ cok } s} & \text{Cok } T \text{ cok } s \\
 T_{a'} \downarrow & & \downarrow T \text{ Cok } (a, a') & & \downarrow T_{ts}(a) \\
 T_{ts} & \xrightarrow{T \text{ cok } t} & T \text{ Cok } t & \xrightarrow{\text{cok } T \text{ cok } t} & \text{Cok } T \text{ cok } t
 \end{array}$$

kommutativ ist.

ii.) Sind $s, t, u \in \mathcal{O} \mathcal{T}$ und $a \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Qs, Qt)$, $b \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Qt, Qu)$ mit $s \gg_t a$, $t \gg_u b$, so ist $s \gg_{ub} a$ und $T_{ut}(b) T_{ts}(a) = T_{us}(ba)$.

Der Beweis ist klar und steht im wesentlichen schon in [3], III, 1.

Insbesondere bildet also für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{A}$

$(\text{Cok } T \text{ cok } s, T_{ts}(1_A))_{s \in \mathcal{T}(A)}$ ein direktes System. Wir setzen

$T_{s's} := T_{s's}(1_A)$.

Ist $\overline{T} = (T^0, T^1, \delta_{\overline{T}}) \in \mathcal{O} \mathcal{T}\text{-verb}^{(0,1)} \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, so sei für alles $s \in \mathcal{O} \mathcal{T}$

$\overline{T}_s$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\overline{T}_s \cdot \text{cok } T^0 \text{ cok } s = \delta_{\overline{T}}(s)$.

Offenbar ist für $A \in \mathcal{O} \mathcal{A}$ und $s \gg s'$ in $\mathcal{T}(A)$ $\overline{T}_s, T_{s's}^0 = \overline{T}_{s'}$.

Satz 2.5 :

Sei $\overline{T} = (T^\circ, T^1, \delta_{\overline{T}}) \in O\overline{\mathcal{T}}\text{-verb}^{(0,1)}\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$.

i.) Jedes Diagramm $\begin{array}{ccc} \alpha \downarrow & \xrightarrow{Zs} & Zs \\ \downarrow \alpha & \xrightarrow{Zs} & \downarrow Zs \end{array}$ mit $s \in O\overline{\mathcal{T}}$ lasse sich in ein kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} \alpha \downarrow & \xrightarrow{Zs} & \downarrow Zs \\ \downarrow \alpha & \xrightarrow{\epsilon} & \downarrow t \end{array}$ mit $t \in O\overline{\mathcal{T}}$ einbetten.

ii.) Für alle $A \in O\mathcal{O}$ sei $(T^1 A, \overline{T}_s)_{s \in \overline{\mathcal{T}}(A)} = \varinjlim_{s \in \overline{\mathcal{T}}(A)} (\text{Cok } T^\circ \text{cok } s, T_{s,1}^\circ)$. Dann ist $\overline{T}$ universeller $\overline{\mathcal{T}}$ - δ -Funktor, d.h. $\overline{T} \cong S_{(0,1)} T^\circ$.

Beweis :

Seien $\overline{U} = (U^\circ, U^1, \delta_{\overline{U}}) \in O\overline{\mathcal{T}}\text{-verb}^{(0,1)}\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ und $f^\circ \in \text{Hom}(T^\circ, U^\circ)$.

Die Existenz von genau einem $f^1 \in \text{Hom}(T^1, U^1)$ mit $\overline{f} := (f^\circ, f^1) \in \text{Hom}(\overline{T}, \overline{U})$ ist zu zeigen.

Für alle $A \in O\mathcal{O}$ und s, s' aus $\overline{\mathcal{T}}(A)$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Cok}(f^\circ(Zs'), f^\circ(\text{Cok } s')) & & \text{Cok}(f^\circ(Zs), f^\circ(\text{Cok } s)) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T^\circ Zs' & \xrightarrow{f^\circ(Zs')} & T^\circ \text{Cok } s' & \xrightarrow{f^\circ(\text{Cok } s')} & \text{Cok } T^\circ \text{cok } s & \xrightarrow{\overline{T}_s} & T^1 A \\ \downarrow f^\circ(Zs') & \downarrow f^\circ(\text{Cok } s') & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow f^1(A) \\ U^\circ Zs' & \xrightarrow{f^\circ(Zs')} & U^\circ \text{Cok } s' & \xrightarrow{f^\circ(\text{Cok } s')} & \text{Cok } U^\circ \text{cok } s & \xrightarrow{\overline{U}_s} & U^1 A \end{array} \quad (*)$$

Dabei sei $f^1(A)$ der auf Grund der Voraussetzung

$(T^1 A, \overline{T}_s) = \varinjlim_{s \in \overline{\mathcal{T}}(A)} (\text{Cok } T^\circ \text{cok } s, T_{s,1}^\circ)$ eindeutig existierende Morphismus mit $f^1(A) \overline{T}_s = \overline{U}_s \text{Cok}(f^\circ(Zs), f^\circ(\text{Cok } s))$ für alle $s \in \overline{\mathcal{T}}(A)$.

Wegen $\overline{T}_s \text{cok } T^\circ \text{cok } s = \delta_{\overline{T}}(s)$ und der Kommutativität von $(*)$ folgt

jedenfalls sofort, daß für alle f^1 mit $(f^\circ, f^1) \in \text{Hom}(\overline{T}, \overline{U})$

$f^1(A) = f^1(A)$ für alle $A \in O\mathcal{O}$ gelten muß, also die Eindeutigkeit von f^1 .

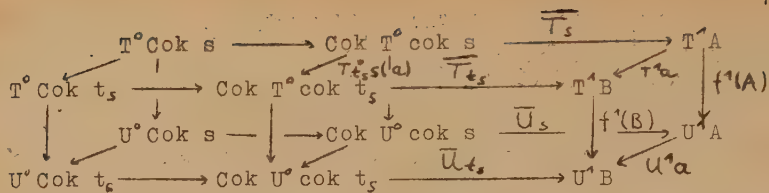
Die Verträglichkeit von f^1 mit δ folgt aus der Konstruktion.

Es bleibt also nur noch $f^1 \in \text{Hom}(T^1, U^1)$ zu beweisen. Sei also

$a \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, B)$. Für alle $s \in \overline{\mathcal{T}}(A)$ wählen wir nach i.) ein

kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} \alpha \downarrow & \xrightarrow{s} & \downarrow Zs \\ B & \xrightarrow{t_s} & Zt_s \end{array}$ mit $t_s \in \overline{\mathcal{T}}(B)$ aus.

Wir erhalten Diagramme



in denen alle Teildiagramme bis auf das ^{der} rechten Seitenfläche nach Definition kommutativ sind. Insbesondere ist $f'(B) T^1 a \bar{T}_s = U^1 a f'(A) \bar{T}_s$ für alle $s \in \mathcal{T}(A)$, woraus mit Hilfe von ii.) $f'(B) T^1 a = U^1 a f'(A)$, d.h. $f' \in \text{Hom}(T^1, U^1)$ folgt, q.e.d.

Folgerungen und Bemerkungen 2.6 :

- 1.) Der vorige Satz bleibt richtig, wenn man die Mengen $\mathcal{T}(A)$ durch cointinitiale Teilmengen $\mathcal{T}(A)'$ ersetzt; denn in diesem Fall folgt aus $(T^1 A, \bar{T}_s) = \lim_{s \in \mathcal{T}(A)'} (\text{Cok } T^0 \text{ cok } s, T_{s,s}^0)$ auch $(T^1 A, \bar{T}_s) = \lim_{s \in \mathcal{T}(A)} (\text{Cok } T^0 \text{ cok } s, T_{s,s}^0)$.
- 2.) Sei $\mathcal{L}$ Abelsch. Für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{O}$ sei $\mathcal{T}(A)'$ eine nach unten gefilterte cointinitiale Teilmenge von $\mathcal{T}(A)$. $\mathcal{L}$ habe exakte direkte Limites über gefilterten Indexmengen I mit $|I| < \sup_{A \in \mathcal{O} \mathcal{O}} |\mathcal{T}(A)'|$. Sei $\bar{T} = (T^0, T^1, \delta_{\bar{T}}) \in \mathcal{T}$ -verb¹⁰¹ $\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ derart, daß für alle $s \in \mathcal{O} \mathcal{T}^*$ $T^0 \xrightarrow{\text{Cok } s} T^0 \text{ cok } s \xrightarrow{\delta_{\bar{T}}(s)} T^1 A$ exakt ist. i) von 2.5 gelte. Genau dann ist $\bar{T}$ universeller $\mathcal{T}$ - δ -Funktorkomplex, wenn für alle $A \in \mathcal{O} \mathcal{O}$ $***) \sup_{s \in \mathcal{T}(A)} \bar{T}_s = 1_{T^1 A}$ gilt.

Beweis :

Die Exaktheit von $*)$ zeigt, daß $\bar{T}_s$ für alle s Monomorphismus ist. $\bar{T}_s$ sei das zu $\bar{T}_s$ äquivalente Unterobjekt.

Die Bedingung $\sup_{s \in \mathcal{T}(A)} \bar{T}_s = 1_{T^1 A}$ ist dann, da $\mathcal{T}(A)'$ gefiltert und deshalb $\lim_{s \in \mathcal{T}(A)'} \bar{T}_s$ exakt ist, äquivalent mit $(T^1 A, \bar{T}_s) = \lim_{s \in \mathcal{T}(A)'} (\text{Cok } T^0 \text{ cok } s, T_{s,s}^0)$.

Daß die Bedingung $***)$ hinreichend ist, folgt dann aus dem vorigen Satz. Daß sie notwendig ist, folgt aus dem folgenden Satz.

- 3.) Folgerung 2.) enthält insbesondere die entsprechenden Ergebnisse von A. Grothendieck [7], 2.2.1, D. Buchsbaum [2], 4.1.4,

H.Röhrh [14], 2.9 .

Satz 2.7 :

$\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{T}$ mögen die gleichen Voraussetzungen wie in 2.5 erfüllen. Zusätzlich gelte :

- i.) Für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$ sei $\mathcal{T}(A)$ nach unten gefiltert.
- ii.) Sei $T \in \mathcal{O}\text{funk}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ und existiere $\lim_{s \in \mathcal{T}(A)} (\text{Cok } T \text{ cok } s, T_{s',s})$.
Dann existiert $S_{\{0,1\}}(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{T})(T)$, und zwar ist für $A \in \mathcal{O}\mathcal{A}$
 $S_{\{0,1\}}^1 TA \approx \lim_{s \in \mathcal{T}(A)} (\text{Cok } T \text{ cok } s, T_{s',s})$.

Der Beweis verläuft analog zu dem von 2.5.

Folgerungen und Bemerkungen 2.8 :

1.) Der Satz ist ebenso gültig, wenn man darin $\mathcal{T}(A)$ durch eine coininitiale Teilmenge $\mathcal{T}(A)'$ von $\mathcal{T}(A)$ ersetzt.

Hat z.B. $\mathcal{T}(A)$ ein kleinstes Element s_0 , so ist $\mathcal{T}(A)' := \{s_0\}$ coinital in $\mathcal{T}(A)$, und die Voraussetzungen i.) und ii.) von 2.7 sind für $\mathcal{T}(A)'$ von selbst erfüllt.

Der Existenzsatz für Satelliten (absoluter und relativer Fall) von D.Buchsbaum [2] ist in 2.7 enthalten. Tatsächlich ist 2.7 nur eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Buchsbaum in [2].

Der Existenzsatz von H.Röhrh [14] ($\mathcal{T} = \text{Mon } \mathcal{A}$) ist ebenfalls in 2.7 enthalten; denn H.Röhrh gibt eine coininitiale Teilmenge $\mathcal{T}(A)'$ von $\mathcal{T}(A)$ so an, daß alle $T_{s',s}, s', s \in \mathcal{T}(A)'$, Isomorphismen sind.

2.) Ist $\mathcal{A}$ keine kleine Kategorie, so bleiben die vorigen Ergebnisse richtig, wenn man an den relevanten Stellen $\mathcal{T}(A)$ durch eine coininitiale Teilmenge $\mathcal{T}(A)' \in \mathcal{U}$ ersetzt.

3.) Völlig neue Anwendungen erhält man, wenn $\mathcal{O}\mathcal{T}$ nicht mehr, wie bisher in der Literatur üblich, eine Menge von Monomorphismen ist. Als Hauptanwendung betrachten wir die auf injektive Strukturen im Sinne von Maranda [12].

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ seien additive Kategorien mit Cokernen; $\mathcal{A}$ braucht

nicht klein zu sein.

Sei $J=(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ eine injektive Struktur in $\mathcal{O}$, d.h. ein Paar einer Teilmenge $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}\mathcal{O}$ und einer Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}\mathcal{O}$ mit folgenden Eigenschaften :

- i.) $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{O}\mathcal{O} \mid \text{Hom}(a, A) \text{ surjektiv für alle } a \in \mathcal{M}\}$
 - ii.) $\mathcal{M} = \{a \in \mathcal{M}\mathcal{O} \mid \text{Hom}(a, A) \text{ surjektiv für alle } A \in \mathcal{X}\}$
 - iii.) Für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{O}$ existiert ein $a \in \mathcal{M}$ mit $Qa=A$ und $Za \in \mathcal{X}$
- Die Objekte von $\mathcal{X}$ heißen $\mathcal{M}$ -injektiv oder J -injektiv.

Sei $\mathcal{T}$ die volle additive Unterkategorie von $\text{Morph } \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O}\mathcal{T} = \mathcal{M}$. Für alle $A \in \mathcal{O}\mathcal{O}$ hat $\mathcal{T}(A)$ wegen iii.) ein kleinstes Element. Also folgt aus 2.7 und 2.8, 1) die Existenz der Funktoren $S_{\{0,1\}}(\mathcal{O}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$ und damit von

$S_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\mathcal{O}, \mathcal{L}, \mathcal{T}) : \text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{T}\text{-verb}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$.

Offenbar ist für alle $T \in \mathcal{O}\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ und $A \in \mathcal{X}$ $S^n TA = 0$ für $n > 0$.

4.) Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Folgerung 3.). Zusätzlich seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{L}$ Abelsch. Wir deuten kurz an, wie man in diesem Fall eine Theorie der abgeleiteten Funktoren aufbauen kann.

Eine Folge $A' \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} A''$ in $\mathcal{O}$ heißt $\mathcal{T}$ -exakt in A , falls $a' \cdot a = 0$ ist und falls der kanonische Morphismus s mit $a' = s \cdot \text{cok } a$ in $\mathcal{O}\mathcal{T} = \mathcal{M}$ liegt. Entsprechend definiert man Exaktheit für längere Folgen. Z.B. ist für alle $s \in \mathcal{O}\mathcal{T}$ die Folge

$$0 \longrightarrow Qs \xrightarrow{s} Zs \xrightarrow{\text{cok } s} \text{Cok } s \longrightarrow 0 \quad \mathcal{T}\text{-exakt.}$$

Ein Funktor $T \in \mathcal{O}\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ heißt $\mathcal{T}$ -linksexakt, falls er jede $\mathcal{T}$ -exakte Folge $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ in eine exakte Folge (im üblichen Sinn) $0 \longrightarrow TA' \longrightarrow TA \longrightarrow TA''$ in $\mathcal{L}$ transformiert.

Sei $\mathcal{T}\text{-Sex}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ die volle Unterkategorie von $\text{funkt}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ aller $\mathcal{T}$ -linksexakten Funktoren.

Wir zeigen unten, daß der Einbettungsfunktor

$E : \mathcal{T}\text{-Sex}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightsquigarrow \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ einen adjungierten Funktor besitzt, den wir mit R_J^0 bezeichnen. $r_J^0 : \text{id}_{\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \rightarrow E R_J^0$ sei der kanonische Morphismus. Für $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ heißt $R_J^0 T$ der 0-te abgeleitete Funktor von T .

Seien dann $R_J := S_{Z,0}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T}) E R_J^0$ und $R_J^n := S_{Z,0}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T}) E R_J^0$ für $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ heißt $R_J^n T$ der n-te abgeleitete Funktor von T .

Die Existenz von R_J^0 und damit von allen R_J^n zeigt man mit der gleichen Methode wie [3], V.

Für $A \in \text{O}\mathcal{A}$ heißt eine Folge $0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$ J-injektive Auflösung von A , falls sie $\mathcal{T}$ -exakt ist und alle $I^k, k \geq 0$, J-injektiv sind. Zu jedem $A \in \text{O}\mathcal{A}$ gibt es auf Grund der Eigenschaft iii.) der injektiven Struktur eine J-injektive Auflösung; sei $\widetilde{A} : 0 \rightarrow A \rightarrow I^0(A) \rightarrow I^1(A) \rightarrow I^2(A) \rightarrow \dots$ eine ausgewählte Auflösung. Sei $\overline{A}$ der Komplex $0 \rightarrow I^0(A) \rightarrow I^1(A) \rightarrow \dots$.

Jeder Morphismus $a \in \text{M}\mathcal{A}$ läßt sich bis auf Homotopie eindeutig zu einem Komplexmorphismus $\widetilde{a} : \widetilde{Qa} \rightarrow \widetilde{Za}$ und dann auch zu $\overline{a} : \overline{Qa} \rightarrow \overline{Za}$ fortsetzen.

Auf die übliche Weise werden dadurch schließlich Funktoren $\text{Der}_J^n : \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightsquigarrow \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), n \geq 0$, induziert; und zwar ist für $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $A \in \text{O}\mathcal{A}$ $(\text{Der}_J^n T)A = H^n(\overline{TA})$, wobei $\overline{TA}$ der durch Anwendung von T auf $\overline{A}$ entstehende Komplex ist. Für alle $n \geq 0$ und $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ existieren schließlich funktorielle Morphismen $\delta^n(T) : (\text{Der}_J^n T) \cdot \text{Cok} \rightarrow (\text{Der}_J^{n+1} T) \cdot Q$ in $\text{Mfunkt}(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ derart, daß $\text{Der}_J^n T := (\text{Der}_J^n T, \delta^n(T))$ in $\text{O}\mathcal{T}\text{-verb}^{Z,0} \text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ liegt und daß für alle $s \in \text{O}\mathcal{T}$ die Folge $\text{O}\mathcal{A} \rightarrow \text{Der}_J^n T Z s \xrightarrow{\text{Der}_J^n T \text{Cok } s} \text{Der}_J^n T \text{Cok } s \xrightarrow{S^n(T)(s)} \text{Der}_J^{n+1} T Q s \xrightarrow{\text{Der}_J^{n+1} T S} \text{Der}_J^{n+1} T Z s$ exakt ist.

Der_J wird außerdem zu einem Funktor von $\text{funkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ in

in $\mathcal{T}$ -verb²-funkt($\mathcal{A}, \mathcal{B}$), und es gilt $\text{Der}_J \cong S_{Z_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T}) \text{Der}_J^\circ$.
Das folgt unmittelbar aus 2.6, 2).

Für alle $T \in \text{Ofunkt}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist $\text{Der}_J^\circ T$ $\mathcal{T}$ -linksexakt. Sei zunächst $s \in \mathcal{O}\mathcal{T}$. Dann ist (s.o.)

$0 \rightarrow \text{Der}_J^\circ T Q_s \xrightarrow{\text{Der}_J^\circ T s} \text{Der}_J^\circ T Z_s \rightarrow \text{Der}_J^\circ T \text{Cok } s$ exakt in $\mathcal{B}$, insbesondere ist also $\text{Der}_J^\circ T s$ Monomorphismus.

Ist schließlich $0 \rightarrow A' \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} A''$ $\mathcal{T}$ -exakt in $\mathcal{A}$, so sind $a \in \mathcal{O}\mathcal{T}$ und $a' = s \text{Cok } a$ mit $s \in \mathcal{O}\mathcal{T}$. Dann ist $\text{Der}_J^\circ T s$ Monomorphismus, und aus der Exaktheit von

$0 \rightarrow \text{Der}_J^\circ T Q_a \rightarrow \text{Der}_J^\circ T Z_a \rightarrow \text{Der}_J^\circ T \text{Cok } a$ folgt diejenige von
 $0 \rightarrow \text{Der}_J^\circ T A' \rightarrow \text{Der}_J^\circ T A \rightarrow \text{Der}_J^\circ T A''$, q.e.d..

Man sieht nun leicht, daß $\text{Der}_J^\circ \cong R_J^\circ$ gilt, d.h. daß Der_J° zu $\bar{E}$ adjungiert ist. Als Endresultat erhält man also den

Satz 2.9 :

$\text{Der}_J \cong R_J$; es gelten also die üblichen Eigenschaften der abgeleiteten Funktoren.

5.) Analoge Ergebnisse erhält man für Funktoren in mehreren Variablen. Gegebenenfalls benötigt man projektive Strukturen.

6.) Insbesondere lassen sich die Funktoren $\text{Ext}_J^n(A, *) : \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Ab}$ als abgeleitete Funktoren von $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, *)$ definieren. Da R_J ein Funktor ist, sind die $\text{Ext}_J^n(*, *)$ sogar Funktoren in beiden Variablen auf natürliche Weise.

7.) Im Fall, daß $\mathcal{O}\mathcal{T}$ eine Menge von Monomorphismen ist, erhält man im wesentlichen die Resultate von A. Heller [8] über die Existenz von abgeleiteten Funktoren im relativen Fall zurück.

8.) Beispiel

Sei R_A ein Radikal im Sinne von Maranda [12]. Seien

$\mathcal{X} := \{A \in \mathcal{O}\mathcal{A} \mid R_A A = 0\}$ und $J := (\mathcal{X}, \mathcal{M})$ mit

$\mathcal{M} := \{a \in M\mathcal{O}\mathcal{A} \mid \text{Hom}(a, A) \text{ surjektiv für alle } A \in \mathcal{X}\}$.

Dann ist $R_J^\circ \text{id}_{\mathcal{A}} A \cong A/R_A A$.

§3. Kohomologiefunktoren

1.) Allgemeines

$\mathcal{I}$ bezeichne im folgenden eine kleine Kategorie oder ein kleines Diagrammschema (I, ϕ, d) mit Relationen R . Γ sei eine Teilmenge von $M\mathcal{I}$ bzw. von ϕ .

Auf Grund der Isomorphie von Diagrammkategorien mit geeigneten Funktorkategorien (s. § 1) können wir theoretisch darauf beschränken, daß $\mathcal{I}$ eine Kategorie ist. In den Beispielen wird aber gerade die Annahme, daß $\mathcal{I}$ nur ein Diagrammschema ist, besonders instruktiv sein.

Definition 3.1 :

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie mit Cokernen. Der Funktor

$\mathcal{I}_r(\mathcal{A}) : \text{funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ existiere. Sei $\mathcal{T}$ eine volle

additive Unterkategorie von $\text{Morphfunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ mit den in § 2 aufgeführten Eigenschaften. Existiere

$S_{\mathbb{Z}, 0}(\text{funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \mathcal{A}, \mathcal{T}) \mathcal{I}_r(\mathcal{A})$.

Dann nennt man für $n \geq 0$

$H^n((\mathcal{I}, \Gamma), \mathcal{A}, \mathcal{T}) := S_{\mathbb{Z}, 0}^n(\text{funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \mathcal{A}, \mathcal{T}) \mathcal{I}_r(\mathcal{A})$ n -ten $\mathcal{T}$ -Kohomologiefunktor von $(\mathcal{I}, \Gamma)$ mit Werten in $\mathcal{A}$.

Für $\mathcal{T}_0 := \text{Mon funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ setzen wir

$H^n((\mathcal{I}, \Gamma), \mathcal{A}) := H^n((\mathcal{I}, \Gamma), \mathcal{A}, \mathcal{T}_0)$.

Bemerkungen 3.2 :

1.) $\text{funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ist im allgemeinen keine kleine Kategorie. Die Existenzsätze für Satelliten müssen deshalb entsprechend Bemerkung 2.8, 2) modifiziert werden.

2.) Man erhält die Kohomologiefunktoren also als Rechtssatelliten von inversen Limites. Dual dazu bekommt man die Homologiefunktoren als Linkssatelliten von direkten Limites.

3.) Die Kohomologiefunktoren $H^n((\mathcal{I}, \Gamma), \mathcal{A}, \mathcal{T})$ existieren z.B. dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Abelsche Kategorie mit folgenden Eigenschaften

ten ist :

- i.) $\mathcal{O}$ besitzt direkte Produkte der Mächtigkeit $\max(|\mathcal{O}\mathcal{Z}|, |\mathcal{P}|)$
- ii.) $\mathcal{O}\mathcal{T}$ ist die Menge der Morphismen einer injektiven Struktur $\mathcal{J}=(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ auf $\text{funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})$.

Die erste Voraussetzung garantiert nämlich die Existenz von

$\mathcal{Z}_\rho(\mathcal{O})$ (II, 7.1*), während die zweite die Existenz von $S_{\mathcal{Z}_{\rho_0}}(\text{funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O}), \mathcal{O}, \mathcal{T})$ sichert.

- i.) ist z.B. für die Kategorie Ab der Abelschen Gruppen erfüllt. Tatsächlich spielen die Kohomologiefunktoren $H^n((\mathcal{Z}, \mathcal{P}), \text{Ab})$ die größte Rolle.

4.) Ist $\mathcal{O}$ Abelsch, so ist $\mathcal{Z}_\rho(\mathcal{O})$ linksexakt (II, 8.10, 3*). Also gilt $H^n((\mathcal{Z}, \mathcal{P}), \mathcal{O}) \cong R^n \mathcal{Z}_\rho(\mathcal{O})$, d.h. die Kohomologiefunktoren lassen sich mit Hilfe von injektiven Auflösungen berechnen, falls solche in $\text{funkt}(\mathcal{Z}, \mathcal{O})$ existieren.

6.) Die Kohomologiefunktoren hängen funktoriell von $(\mathcal{Z}, \mathcal{P})$ ab. Dazu betrachte man II, §5.

7.) Beispiele

Jetzt sei $\mathcal{Z}$ entweder eine kleine Kategorie oder ein kleines Diagrammschema (I, ϕ, d) mit Relationen R . $\mathcal{P}$ sei eine Teilmenge von $M\mathcal{Z}$ oder von ϕ .

Wir zeigen, daß sich viele der in der Literatur betrachteten Kohomologiegruppen in der Gestalt $H^n((\mathcal{Z}, \mathcal{P}), \mathcal{O})$ mit geeignetem $(\mathcal{Z}, \mathcal{P})$ darstellen lassen.

- i.) Sei R ein Ring mit 1 mit einer Augmentation $\epsilon : R \longrightarrow {}_R Q$. Sei $I := Ke \epsilon$. Wir betrachten R als additive Kategorie mit einem Objekt und I als Teilmenge von MR .

Dann existiert $\overleftarrow{R}_I(\text{Ab}) : \text{funkt}(R, \text{Ab}) \cong \text{Mod } R \rightsquigarrow \text{Ab}$, und es ist $\overleftarrow{R}_I(\text{Ab}) \cong \text{Hom}_R(Q, *)$ (II, 4.5, 4.)).

Damit ist $H^n((R, I), \text{Ab}) \cong \text{Ext}_R^n(R/I, *)$, d.h. die hier definierten Kohomologiefunktoren stimmen mit den z.B. in [3] definierten

Kohomologiegruppen des augmentierten Ringes überein.

ii.) Sei G eine Gruppe. Wir betrachten G als Kategorie mit einem Objekt und setzen $\Gamma := G$.

Die Kategorie $\text{funkt}(G, \text{Ab})$ ist nichts weiter als die Kategorie der G -Moduln. $\overleftarrow{G}_G$ existiert, und zwar ist für jeden G -Modul A $\overleftarrow{G}_G A \cong A^G \cong \text{Hom}_G(Z, A)$, wobei Z als G -Modul mit der trivialen Operation von G auf Z aufgefaßt wird.

Also ist $H^n((G, G), \text{Ab}) \cong \text{Ext}_G^n(Z, *)$.

iii.) Sei K ein kommutativer Ring und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K . Wir betrachten $\mathfrak{g}$ als Diagrammschema wie in 1.4, 4), ii) und setzen $\Gamma := \mathfrak{g}$.

Die Kategorie $\text{Mod } K$ ist K -additiv, und der Funktor

$\overleftarrow{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}}(\text{Mod } K) : \text{Diagr}(\mathfrak{g}, \text{Mod } K) \rightsquigarrow \text{Mod } K$ existiert und ist K -additiv. Ist A ein $\mathfrak{g}$ -Modul, so ist $\overleftarrow{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}}(\text{Mod } K) A \cong A^{\mathfrak{g}}$.

Die Kohomologiefunktor $H^n((\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \text{Mod } K)$ existieren, da nach 1.4, 4), ii) $\text{Diagr}(\mathfrak{g}, \text{Mod } K) = \text{funkt}(\mathfrak{g}^e, \text{Mod } K) \cong \text{Mod } \mathfrak{g}^e$ gilt, wobei $\mathfrak{g}^e$ die einhüllende K -Algebra von $\mathfrak{g}$ ist, und damit genügend viele Injektive in $\text{Diagr}(\mathfrak{g}, \text{Mod } K)$ existieren. Die $H^n((\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \text{Mod } K)$ stimmen mit den in [3] definierten Kohomologiefunktoren überein.

Dieses Beispiel zeigt, daß zur Definition der Kohomologiegruppen für Lie-Algebren der Umweg über $\mathfrak{g}^e$ überflüssig ist und andererseits durch die hier gegebene Darstellung und die Isomorphie $\text{Diagr}(\mathfrak{g}, \text{Mod } K) \cong \text{funkt}(\mathfrak{g}^e, \text{Mod } K)$ motiviert werden kann.

iv.) Sei $\mathcal{I}$ das Diagrammschema, das aus einer Ecke und einem Pfeil d , der der Relation $(d, d) = 0$ genügt, besteht. Sei $\Gamma := \{d\}$. $\text{Diagr}(\mathcal{I}, \Gamma, \text{Ab})$ ist die Kategorie der Abelschen Gruppen mit Differentiation.

$\overleftarrow{\mathcal{I}}_{\Gamma}(\text{Ab})$ existiert, und zwar ist für jede Gruppe A mit Differentiation $d \overleftarrow{\mathcal{I}}_{\Gamma}(\text{Ab})(A, d) \cong \text{Ke } d$. Nach [3], S. 57, Th. 2.2, ist

$S_{Z_n} \mathcal{I}_r(Ab) \cong H$ für $n > 0$, d.h. $H^n((\mathcal{L}, \Gamma), Ab) \cong H$ für $n > 0$.

Insbesondere fällt also die normale Homologiegruppe einer Gruppe mit Differentiation unter das hier gegebene Schema.

2.) Standardkomplexe

Wir zeigen jetzt, daß für jede Abelsche Kategorie $\mathcal{O}$ mit exakten direkten Produkten und jede kleine Kategorie $\mathcal{L}$ die abgeleiteten Funktoren (bzgl. $\mathcal{T} = \text{Mon Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$ des Funktors

$\mathcal{I}_{\mathcal{M}\mathcal{L}}: \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O}) \rightsquigarrow \mathcal{O}$ existieren und als Homologieobjekte eines Standardkomplexes erhalten werden können. Wir bemerken, daß die Voraussetzungen insbesondere die Existenz und Linksexaktheit von $\mathcal{I} := \mathcal{I}_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$ implizieren.

Sei $\mathcal{M}$ folgende Kategorie (s. [11], S. 233):

$\mathcal{O}\mathcal{M}$ sei die Menge aller mit 0 beginnenden endlichen Intervalle $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, nicht negativer ganzer Zahlen.

$\mathcal{M}\mathcal{M}$ sei die Menge aller monoton wachsenden Abbildungen zwischen diesen Intervallen.

$\text{Funkt}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ heißt die Kategorie der cosimplizialen Objekte von $\mathcal{O}$.

Seien ε_n^i (kurz ε^i): $[n] \rightarrow [n+1]$, $i=0, \dots, n+1$, und

η_n^i (kurz η^i): $[n+1] \rightarrow [n]$, $i=0, \dots, n$, die in [11], S. 233 f.f., eingeführten Morphismen in $\mathcal{M}$. Jedes cosimpliziale Objekt F in

$\text{Funkt}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ bestimmt damit insbesondere Objekte $F[n] \in \mathcal{O}$ und

Morphismen d_n^i (kurz d^i): $F[n] \rightarrow F[n+1]$, $i=0, \dots, n+1$, und

s_n^i (kurz s^i): $F[n+1] \rightarrow F[n]$, $i=0, \dots, n$, welche den Bedingungen $d_i^i \circ d^i = d^{i-1} \circ d^{i-1}$ für $i < j$, $s_i^i \circ s^i = s^{i-1} \circ s^{i-1}$ für $i < j$ und $s_i^i \circ d^i = \begin{cases} d^{i-1} \circ s^{i-1} & \text{für } i \leq j \\ 1 & \text{für } i=j, i=j+1 \\ d^{i-1} \circ s^i & \text{für } i > j+1 \end{cases}$ genügen [loc.cit.].

Umgekehrt bestimmt jede Folge A^n , $n \geq 0$, von Objekten aus $\mathcal{O}$ zu-

sammen mit Familien $d_n^i: A^n \rightarrow A^{n+1}$, $i=0, \dots, n+1$, und

$s_n^i: A^{n+1} \rightarrow A^n$, $i=0, \dots, n$, von Morphismen, welche den Relationen

*) genügen, eindeutig ein cosimpliziales Objekt $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ mit $F[n] = A$, $d_m^i = F e_n^i$ und $s_n^i = F \eta_n^i$ [loc. cit., Th. 5.2]. Wir werden diese Charakterisierung unten ausnutzen.

Sei $\text{Kompl } \mathcal{A}$ die Kategorie der positiven Komplexe von $\mathcal{A}$. Sei

$K : \text{Funkt}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Kompl } \mathcal{A}$ der exakte Funktor, der jedem cosimplizialen Objekt F den Komplex $KF : A \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2 \xrightarrow{d^2} \dots$ mit $A^n := F[n]$ und $d^n := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F e_n^i$ zuordnet.

Schließlich sei $H := (H^n, \delta^n)_{n \geq 0} \in \text{Overb}^{Z_{\geq 0}}(\text{Kompl } \mathcal{A}, \mathcal{A})$ der Homologiefunktor.

Wir geben nun einen exakten Funktor

$S : \text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Funkt}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ so an, daß

$HKS := (H^n KS, \delta^n(KS*)) \in \text{Overb}^{Z_{\geq 0}}(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \mathcal{A})$ universeller δ -Funktor und $H^0 KS \approx \mathcal{I}$ ist, d.h. $R \mathcal{I} \approx HKS$. Wegen der Exaktheit von S ist $(H^n KS, \delta^n(KS*))$ tatsächlich Element von $\text{verb}^{Z_{\geq 0}}(\text{Funkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A}), \mathcal{A})$.

Sei für $n \geq 1$ I^n die Teilmenge von $(M\mathcal{I})^n$ aller n -Tupel $(c_0, \dots, c_{n-1})$, für die das Produkt $c_0 c_1 \dots c_{n-1}$ definiert ist. Für

$F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ und $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in I^n$, $n \geq 1$, sei

$$A_F(c_0, \dots, c_{n-1}) := F Z c_0.$$

Definiere dann für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ $SF[0] := \prod_{C \in O\mathcal{I}} FC$ und für

$$n \geq 1 \quad SF[n] := \prod_{(c_0, \dots, c_{n-1}) \in I^n} A_F(c_0, \dots, c_{n-1}).$$

Seien

$$p_F(c_0, \dots, c_{n-1}) : SF[n] \rightarrow A_F(c_0, \dots, c_{n-1}), \quad p_F(C) : SF[0] \rightarrow FC$$

die zugehörigen Projektionen. Schließlich definieren wir

$$d_n^i(F) : SF[n] \rightarrow SF[n+1], \quad i=0, \dots, n+1, \text{ und}$$

$$s_n^i(F) : SF[n+1] \rightarrow SF[n], \quad i=0, \dots, n, \text{ durch folgende Beziehungen:}$$

$$n=0: \quad p_F(c_0) d_0^0(F) := F c_0 p(Q c_0), \quad p_F(c_0) d_0^1(F) := p(Z c_0),$$

$$p_F(C) s_0^0(F) := p_F(1_C),$$

$$n=1: \quad p_F(c_0, \dots, c_n) d_n^i(F) := \begin{cases} F c_0 p_F(c_1, \dots, c_n) & i=0 \\ p_F(c_0, \dots, c_{i-1} c_i c_{i+1}, \dots, c_n) & i=1, \dots, n \\ p_F(c_0, \dots, c_{n-1}) & i=n+1 \end{cases}$$

$$p_F(c_0, \dots, c_{n-1}) s_n^i(F) := p_F(c_0, \dots, c_{i-1} \cdot 1 \cdot c_i, \dots, c_{n-1}) \quad i=0, \dots, n.$$

Eine wegen vieler Fallunterscheidungen etwas mühselige Rechnung zeigt, daß diese $d'_n(F)$ und $s'_n(F)$ den Relationen $*$) vom Anfang dieses Abschnitts genügen. Wir erhalten also ein eindeutig bestimmtes cosimpliziales Objekt SF , welches den Beziehungen $SF e'_n = d'_n(F)$ und $SF \eta'_n = s'_n(F)$ genügt.

Es ist klar, daß sich die Zuordnung $F \rightsquigarrow SF$ auf natürliche Weise zu einem Funktor $S : \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Funkt}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ fortsetzen läßt. Daß S exakt ist, resultiert aus der vorausgesetzten Exaktheit der Funktoren "direktes Produkt" in $\mathcal{A}$. Damit ist HKS wohldefiniert. Daß $H^0 KS \cong \mathcal{L}$ gilt, folgt unmittelbar aus II, 7.1^{*}. Wir zeigen jetzt noch, daß HKS universell ist. Dazu reicht es nach 2.6, 2) zu zeigen, daß jedes $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ monomorph in ein $\hat{F} \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ mit $H^n KS \hat{F} = 0$ für $n \geq 1$, d.h. für welches $KS \hat{F}$ eine exakte Folge ist, eingebettet werden kann.

Wir zeigen sogar, daß diese Einbettung funktoriell geht.

Für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ sei $\hat{F} \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ folgendermaßen definiert: Für $C \in \mathcal{OL}$ sei $\hat{F}C := \prod_{c \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(C, \cdot)} A_F(c)$ mit den Projektionen $q_F(c) : \hat{F}C \longrightarrow A_F(c)$. Ist $e \in M_{\mathcal{L}}$ ein Morphismus, so sei $\hat{F}e$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $q_F(d) \hat{F}e = q_F(de)$ für alle $d \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(Ze, \cdot)$.

Ist $a = (a(C))_{C \in \mathcal{OL}} \in M_{\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})}$, so sei $\hat{a} := (\hat{a}(C))_{C \in \mathcal{OL}}$ mit $\hat{a}(C) := \prod_{c \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(C, \cdot)} a(A_F(c))$.

Damit ist die Zuordnung $F \rightsquigarrow \hat{F}, a \rightsquigarrow \hat{a}$ ein Funktor $\hat{}$ von $\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ in $\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$.

Für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ und $C \in \mathcal{OL}$ sei $r(F)(C) : FC \longrightarrow \hat{F}C$ definiert durch $q_F(c) r(F)(C) := Fc, c \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(C, \cdot)$. Dann ist

$r(F) := (r(F)(C))_{C \in \mathcal{OL}} \in \text{Hom}_{\text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})}(F, \hat{F})$ ein funktorieller Monomorphismus, und schließlich wird $r := (r(\hat{F}))_{F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})} : \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}) \longrightarrow \hat{}$ ebenfalls ein funktorieller Morphismus. Die Objekte der Form $\hat{F}$ in $\text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ heißen coinduziert (von F).

Für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ hat $\hat{F}$ tatsächlich die gewünschten Eigenschaften. Für ein solches F ist $\hat{SF}[n] = \prod_{\substack{c_0, \dots, c_n \in \mathcal{A} \\ (c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_F(c_1, \dots, c_n)}} \hat{F}c$ $n=0$ $n \geq 1$.

Wegen $\hat{A}_F(c_1, \dots, c_n) = \hat{F}Zc_1 = \prod_{c \in \text{Hom}_F(\mathbb{Z}c_1, \dots)} \hat{A}_F(c)$ gibt es offenbar für alle $n \geq 0$ Isomorphismen $a_n: \hat{SF}[n] \rightarrow \hat{SF}[n+1]$, welche für $n=0$ durch die Bedingungen $p_F(c_0)a_0 := q_F(c_0)p_{\hat{F}}(Qc_0)$ und für $n \geq 1$ durch $p_F(c_0, \dots, c_n)a_n := q_F(c_0)p_{\hat{F}}(c_1, \dots, c_n)$ charakterisiert sind.

Seien schließlich für alle $n \geq 0$ und $0 \leq i \leq n+1$

$$d_n^i(F): \hat{SF}[n+1] \rightarrow \hat{SF}[n+2] \text{ definiert durch}$$

$$p_F(c_0, \dots, c_{n+1})d_n^i := \begin{cases} p_F(c_0, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{n+1}) & i=0, \dots, n \\ p_F(c_0, \dots, c_n) & i=n+1 \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß für alle $n \geq 0$ und alle $i, 0 \leq i \leq n+1$,

$$\begin{array}{ccc} \hat{SF}[n] & \xrightarrow{d_n(\hat{F})} & \hat{SF}[n+1] \\ \downarrow a_n & & \downarrow a_{n+1} \\ \hat{SF}[n+1] & \xrightarrow{d_n^i(F)} & \hat{SF}[n+2] \end{array} \quad \text{kommutativ ist. Setzen wir}$$

$d^n(F) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_n^i(F)$, so haben wir also nur noch die Exaktheit des Komplexes $**): \hat{SF}[1] \xrightarrow{d^1} \hat{SF}[2] \xrightarrow{d^2} \hat{SF}[3] \rightarrow \dots$ zu zeigen.

Für alle $n \geq 1$ seien $j^n := ke d^n$ und $t^n: \hat{SF}[n+1] \rightarrow \hat{SF}[n]$ definiert durch $p_F(c_0, \dots, c_{n-1})t^n := p_F(1, c_0, \dots, c_{n-1})$. Dann ist $j^n = d^{n-1} t^n j^n$, woraus die Exaktheit von $**)$ offenbar folgt.

Es ist nämlich $d^n j^n = 0$, d.h. $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_n^i(F) j^n = 0$, d.h.

$$p_F(c_0, \dots, c_{n+1}) \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_n^i(F) j^n = 0 \text{ für alle } (c_0, \dots, c_{n+1}) \in I^{n+2},$$

$$\text{d.h. } \sum_{i=0}^n (-1)^i p_F(c_0, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{n+1}) j^n + (-1)^{n+1} p_F(c_0, \dots, c_n) j^n = 0$$

für alle $(c_0, \dots, c_{n+1})$. Wählt man speziell $c_0 = 1$, so resultiert

$$p_F(c_1, \dots, c_{n+1}) j^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i p_F(1, c_1, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{n+1}) j^n + (-1)^{n+1} p_F(1, c_1, \dots, c_n) j^n = 0 \text{ für alle } (c_1, \dots, c_{n+1}), \text{ d.h.}$$

$$p_F(c_0, \dots, c_n) j^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i p_F(1, c_0, \dots, c_{i-1}, c_i, \dots, c_n) j^n + (-1)^{n+1} p_F(1, c_0, \dots, c_{n-1}) j^n = 0 \text{ für alle } (c_0, \dots, c_n).$$

$$p_F(1, c_0, \dots, c_{n-1}) j^n = 0 \text{ für alle } (c_0, \dots, c_n).$$

Andererseits gilt $p_F(c_0, \dots, c_n) d^{n-1} t^n j^n =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i p_F(c_0, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n) t^n j^n + (-1)^n p_F(c_0, \dots, c_{n-1}) t^n j^n \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i p_F(1, c_0, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n) j^n + (-1)^n p_F(1, c_0, \dots, c_{n-1}) j^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} p_F(1, c_0, \dots, c_{i-1}, c_i, \dots, c_n) j^n + (-1)^n p_F(1, c_0, \dots, c_{n-1}) j^n \end{aligned}$$

Also gilt $p_F(c_0, \dots, c_n) j^n - p_F(c_0, \dots, c_n) d^{n-1} t^n j^n = 0, d.h.$

$j^n = d^{n-1} t^n j^n, q.e.d.$ Wir fassen zusammen:

Satz 3.3 :

Die rechtsabgeleiteten Funktoren von $\mathcal{L}$ existieren, und es ist $R\mathcal{L} \cong HKS$.

Folgerungen und Bemerkungen 3.4 :

1.) KSF heißt unnormalisierter Standardkomplex von F.

Aus dem dualen Satz zum in [11], S.236, bewiesenen Normalisierungssatz, der sich ohne Schwierigkeiten für Abelsche Kategorien beweisen läßt, erhält man einen bestimmten exakten Unterfunctor

K_N von K derart, daß $HK_N \cong HK$, insbesondere also auch

$HK_N S \cong R\mathcal{L}$ gelten.

Für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$ ist $(K_N SF)^n = \prod_{(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathcal{L}^n} A_F(c_0, \dots, c_{n-1})$. Ist

$i^n(F) : (K_N SF)^n \longrightarrow (KSF)^n$ die natürliche Injektion, so gibt es genau eine Folge von Morphismen $d_N^n : (K_N SF)^n \longrightarrow (K_N SF)^{n+1}$

$n \geq 0$, so, daß $((K_N SF)^n, d_N^n)_{n \geq 0} \in \text{OKompl } \mathcal{O}$ und $i(F) := (i^n(F))_{n \geq 0}$

aus $\text{Hom}_{\text{Kompl } \mathcal{O}}(K_N SF, KSF)$ ein Monomorphismus sind. Dann ist

$i := (i(F))_{F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O})} \in \text{Hom}(K_N S, KS)$, und für alle $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$

und $n \geq 0$ ist $H^n(i(F))$ ein Isomorphismus.

$K_N SF$ heißt normalisierter Standardkomplex von F.

2.) Ist $\mathcal{L} = G$ eine Gruppe, so erhält man die übliche Kohomologie der Gruppen, jetzt aber mit Werten in Kategorien. KS bzw. $K_N S$ entsprechen dem unnormalisierten bzw. normalisierten inhomogenen Standardkomplex. Tatsächlich war dieses Beispiel der Ausgangspunkt der hier vorgetragenen Überlegungen.

3.) Ist I eine geordnete Menge und macht man I zu einer Kategorie indem man $\text{Hom}(i, j) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } i \not\leq j \\ \alpha_{ij} & \text{für } i \leq j \end{cases}$ setzt mit $\alpha_{ii} = 1$, $\alpha_{ik} \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$ für $k \leq j$, so ist $K_N S$ der normalisierte Standardkomplex, den J.-E. Roos [16] zur Berechnung von $R \varprojlim_I$ angibt.

4.) Ist Γ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $M\mathcal{L}$,

welche alle Identitäten von $M\mathcal{L}$ enthält, so konstruiert man analog zu S einen Funktor $S_P : \text{Funkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Funkt}(M, \mathcal{A})$, indem man für $F \in \text{OFunkt}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ $S_P F[0] := \prod_{d \in \text{OZ}} Fd$ und für $n \geq 1$ $S_P F[n] := \prod_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in P^n \cap I^n} A_F(x_0, \dots, x_{n-1})$, wobei $(x_0, \dots, x_{n-1})$ alle n -Tupel aus $P^n \cap I^n$ durchläuft, setzt. Wieder ist dann $H^{\circ} \text{KS}_P \cong \mathcal{L}_P$.

Im allgemeinen ist aber HKS_P kein universeller δ -Funktor. Dieses ist wiederum der Fall, falls für alle $\gamma \in P$ und $c \in M\mathcal{L}$, für die γc definiert ist, auch $\gamma c \in P$ ist.

Es gilt wieder $\text{HKS}_P \cong \text{HK}_N S_P$.

§ 4. Äußere Algebra, Differentialalgebra und Differentialmodul

Dieser Paragraph soll an einem bekannten Beispiel zeigen, wie die im Kapitel II bewiesenen Sätze in die Untersuchung universeller Funktoren eingehen. Insbesondere soll gezeigt werden, daß sich viele Eigenschaften universeller Funktoren herleiten lassen, ohne die explizite Konstruktion des Funktors, wie üblich, zu benutzen.

1.) Allgemeine Grundlagen

Alle Ringe im folgenden haben ein 1-Element, alle Moduln über Ringen sind unitär. Sei K ein kommutativer Ring.

$K\text{-Alg}$ K sei die Kategorie der kommutativen K -Algebren.

$\text{Mod}^{\circ} K$ sei folgende Kategorie:

$\text{OMod}^{\circ} K$ bestehe aus allen Paaren (in $\mathcal{U}$) (R, M) einer kommutativen K -Algebra R und eines R -Moduls M (vermöge des K -Algebrenhomomorphismus $K \ni 1 \longrightarrow 1 \in R$ ist dann M auch ein K -Modul).

Sind (R, M) und (S, N) zwei Elemente aus $\text{OMod}^{\circ} K$, so sei

$\text{Hom}_{\text{Mod}^{\circ} K}((R, M), (S, N))$ die Menge aller Paare (α, f) aus $\text{Hom}_K(R, S) \times \text{Hom}_K(M, N)$ derart, daß für alle $r \in R$ und $m \in M$ $f(rm) = \alpha(r)f(m)$ gilt.

Die Verknüpfungen seien komponentenweise definiert.

Entsprechend sei die Kategorie $k\text{-gr-Alg}^\circ K$ definiert:

$\text{Ok-gr-Alg}^\circ K$ bestehe aus allen Paaren (R, A) einer kommutativen K -Algebra und einer positiv graduierten, kommutativen R -Algebra

A (vermöge des Homomorphismus $K \ni 1 \longrightarrow 1 \in R$ ist A dann auch wieder eine K -Algebra). Dabei heißt $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ kommutativ, wenn

$a_m a'_n = (-1)^{nm} a'_n a_m$, $\text{Grad } a_m = m$, $\text{Grad } a'_n = n$, gilt.

Sind (R, A) und (S, B) zwei solche Paare, so sei

$\text{Hom}_{k\text{-gr-Alg}^\circ K}((R, A), (S, B))$ die Menge aller Paare (α, f) aus

$\text{Hom}_K(R, S) \times \text{Hom}_K(A, B)$ derart, daß $f = \bigoplus_{n \geq 0} f^n$ vom Grad 0 ist und für $r \in R$ und $a \in A$ $f(ra) = \alpha(r)f(a)$ gilt.

Die Verknüpfung sei wieder komponentenweise definiert.

Die Zuordnung $\text{Ok-gr-Alg}^\circ K \ni (R, A) \rightsquigarrow (R, A^1) \in \text{OMod}^\circ K$

$\text{Mk-gr-Alg}^\circ K \ni (\alpha, f) \rightsquigarrow (\alpha, f) \in \text{MMod}^\circ K$

ist ein Funktor, den wir mit F bezeichnen.

Ist R eine kommutative K -Algebra, so seien $\text{Mod } R$ bzw.

$k\text{-gr-Alg } R$ die Unterkategorien von $\text{Mod}^\circ K$ bzw. $k\text{-gr-Alg}^\circ K$ aller

Objekte (S, N) bzw. (S, A) mit $S=R$ und aller Morphismen (α, f) mit

$\alpha = \text{id}_R$.

Wir machen schließlich $(k\text{-Alg } K, \text{Mod}^\circ K)$ zu einem Paar direkt verbundener Kategorien:

Sind $R \in \text{Ok-Alg } K$ und $(S, N) \in \text{OMod}^\circ K$, so sei

$\text{Hom}_{(k\text{-Alg } K, \text{Mod}^\circ K)}(R, (S, N))$ die Menge aller Paare (α, Δ) eines

K -Algebrenhomomorphismus α von R in S und eines K -Homomorphismus

Δ von R in N , welcher der Produktregel

$\Delta(rr') = \alpha(r)\Delta(r') + \alpha(r')\Delta(r)$ genügt. Δ heißt auch K -Derivation

Die Verknüpfung sei die natürliche.

Insgesamt erhalten wir das mit der kanonischen Verbindung zu F

versehene Tripel $(k\text{-Alg } K, \text{Mod}^\circ K, k\text{-gr-Alg}^\circ K)$ direkt verbundener Kategorien.

Alle drei Teilpaare sind auf Grund von II, 6.2 und II, 6.3 univer-

sell direkt verbunden. Die universellen Funktoren sind der "Differentialmodul" $D : k\text{-Alg } K \rightsquigarrow \text{Mod}^\circ K$, die "Differentialalgebra" $A : k\text{-Alg } K \rightsquigarrow k\text{-gr-Alg}^\circ K$ und die "äußere Algebra" $E : \text{Mod}^\circ K \rightsquigarrow k\text{-gr-Alg}^\circ K$.

Ist $(\alpha, \Delta) : R \longrightarrow DR = (S, N)$ der kanonische Epimorphismus, so folgt leicht, daß α Isomorphismus ist. Ohne Einschränkung wählen wir daher $S=R$ und $\alpha = \text{id}_R$. Da die erste Komponente von DR damit trivial ist, identifizieren wir der Einfachheit halber DR mit seiner zweiten Komponente und nennen $\Delta(R) : R \xrightarrow{\quad} {}_R DR$ kanonische Differentiation.

Entsprechendes gilt für A . Den kanonischen Epimorphismus von R in ${}_R A(R)$ bezeichnen wir mit $\delta(R)$ und nennen ihn ebenfalls kanonische Differentiation.

Schließlich gilt das analoge Resultat auch für E . Ohne Einschränkung können wir $E(R, M) = (R, A)$ und den kanonischen Morphismus in der Gestalt $(\text{id}_R, c(M))$ wählen. Insbesondere induziert E damit Funktoren $E_R : \text{Mod } R \rightsquigarrow k\text{-gr-Alg } R$, welche zu den F entsprechenden Funktoren $F_R : k\text{-gr-Alg } R \rightsquigarrow \text{Mod } R$ adjungiert sind. Wir untersuchen jetzt D, E und A im einzelnen.

2.) Der Differentialmodul

i.) Zunächst einige Bemerkungen über die Kategorien $k\text{-Alg } K$ und $\text{Mod}^\circ K$:

Eine Folge $R \xrightarrow[\beta]{\alpha} S \xrightarrow{\gamma} T$ in $k\text{-Alg } K$ ist genau dann exakt, wenn γ surjektiv und $\text{Ke } \gamma = S(\alpha - \beta)(R)$ ist, wobei $S(\alpha - \beta)(R)$ das von allen Elementen der Gestalt $\alpha(r) - \beta(r)$, $r \in R$, in S erzeugte Ideal ist.

Eine Folge $(R, M) \xrightarrow[(\beta, g)]{(\alpha, f)} (S, N) \xrightarrow[(\gamma, h)]{(\delta, h)} (T, P)$ in $\text{Mod}^\circ K$ ist genau dann exakt, wenn $R \xrightarrow[\beta]{\alpha} S \xrightarrow{\gamma} T$ in $k\text{-Alg } K$ exakt ist, wenn h surjektiv ist und wenn $\text{Ke } h = S(\alpha - \beta)(R)N + S(f - g)(M)$ gilt.

Es existieren nach II, § 7 alle Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{L}}_R(k\text{-Alg } K)$.

Das Tensorprodukt über K ist in $k\text{-Alg } K$ die direkte Summe.

Der filtrierte direkte Limes in $k\text{-Alg } K$ und ebenso in $\text{Mod } K$ ist der mengentheoretische, versehen mit der passenden algebraischen Struktur (II, 7.7, 6)).

Die Polynomringe $K[X_i]_{i \in I}$ sind die freien Objekte von $k\text{-Alg } K$. $K[X]$ ist erzeugendes Objekt von $k\text{-Alg } K$. Zu jedem surjektiven Morphismus $\gamma: S \rightarrow T$ in $k\text{-Alg } K$ existiert eine exakte Folge $R \xrightarrow[\beta]{\alpha} S \xrightarrow{\gamma} T$ mit freiem R .

ii.) Für alle $R \in \text{Ok-Alg } K$ ist ${}_R D_R = R \Delta(R)(R)$, da $\Delta(R): R \rightarrow {}_R D_R$ Epimorphismus ist.

iii.) D ist mit filtrierte direkten Limes vertauschbar. Das folgt aus II, 8.7.

iv.) D ist rechtsexakt (II, 3.1).

iv'.) Seien I ein Ideal der kommutativen K -Algebra S und $\gamma: S \rightarrow S/I$ die kanonische Surjektion. Nach i.) gibt es dann eine exakte Folge $R \xrightarrow[\beta]{\alpha} S \xrightarrow{\gamma} S/I$. Wir erhalten nach iv.) ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & S & \xrightarrow{\gamma} & S/I \\ \downarrow \Delta(R) & & \downarrow \Delta(S) & & \downarrow \Delta(S/I) \\ {}_R D_R & \xrightarrow[\beta, D\beta]{\alpha, D\alpha} & D_S & \xrightarrow[\gamma, D\gamma]{\gamma, D\gamma} & D_{S/I} \end{array}$$

Nach i.) ist dann $\text{Ke } D\gamma = S(\alpha - \beta)(R)D_S + S(D\alpha - D\beta)(D_R)$. Die Kommutativität von $*$) und $S(\alpha - \beta)(R) = I$ liefern

$\text{Ke } D\gamma = IDS + S\Delta(S)(I)$. Aus der Produktregel für $\Delta(S)$ folgen $IDS \subseteq S\Delta(S)(I)$, d.h. es ist $\text{Ke } D\gamma = S\Delta(S)(I)$.

Also ist $D(S/I) \cong DS/S\Delta(S)(I)$ mit der von $\Delta(S)$ induzierten kanonischen Differentiation $\overline{\Delta(S)}: S/I \rightarrow DS/S\Delta(S)(I)$.

v.) Fortsetzung von Differentiationen auf Polynomringe.

Sei R eine kommutative K -Algebra und $S := R[X_i]_{i \in I}$ der Polynomring über R mit Unbestimmten X_i . Wir wollen DS mit Hilfe von D_R ausdrücken.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial X_i}: S \rightarrow {}_S S$ und $\Delta: S \rightarrow S \otimes_R D_R$, definiert durch $\Delta(r) := 1 \otimes \Delta(R)(r)$ für $r \in R$ und $\Delta(X_i) := 0, i \in I$,

sind offenbar K-Derivationen. Seien $(id_S, \frac{\partial}{\partial X_i})^\# := (id_S, f_i)$ und $(id_S, \Delta)^\# := (id_S, f)$. Aus $\frac{\partial}{\partial X_i} X_j = \delta_{ij}$ folgt $f_i \Delta(S)(X_j) = \delta_{ij}$.

Ist $n = (n_i)_{i \in I}$ mit nicht negativen ganzen Zahlen $n_i, n_i = 0$ für fast alle $i \in I$, so sei $X^n := \prod_{i \in I} X_i^{n_i}$. Mit dieser Abkürzung ist dann

$$DS = S \Delta(S) = S \Delta(S)(R) + \sum_{i \in I} S \Delta(S)(X_i) = \sum_n X^n R \Delta(S)(R) + \sum_i S \Delta(S)(X_i)$$

Sei nun $x = \sum_n X^n \otimes \sum_k r_{nk} \Delta(S)(r'_{nk}) + \sum_i s_i \Delta(S)(X_i) = 0$ in DS . Dann ist

$$0 = f(x) = \sum_n X^n \otimes \sum_k r_{nk} \Delta(R)(r'_{nk}) \text{ in } S \otimes_R DR, \text{ woraus wegen } S = \bigoplus_n RX^n$$

$\sum_k r_{nk} \Delta(R)(r'_{nk}) = 0$ für alle n folgt. Bezeichnet $i : R \rightarrow S$ die In-

jektion, so ist dann für alle n auch

$$0 = Di(\sum_k r_{nk} \Delta(R)(r'_{nk})) = \sum_k r_{nk} \Delta(S)(r'_{nk}), \text{ d.h. es gilt}$$

$$DS = \sum_n X^n R \Delta(S)(R) \oplus \sum_i S \Delta(S)(X_i). \text{ Außerdem folgt, daß}$$

$$f|_{\sum_n X^n R \Delta(S)(R)} : \sum_n X^n R \Delta(S)(R) \longrightarrow S \otimes_R DR \text{ ein Isomorphismus ist.}$$

Weiter ist $0 = f_i(x) = s_i f_i(X_i) = s_i$, also sind die $\Delta(S)(X_i)$ S-linear unabhängig, d.h. es gilt

$$DS \cong S \otimes_R DR \oplus \bigoplus_i S \Delta(S)(X_i) \text{ mit S-linear unabhängigen } \Delta(S)(X_i).$$

Bei diesem Isomorphismus geht $\Delta(S)$ in die Differentiation

$$\begin{aligned} \Delta'(S) : S = R[X_i]_{i \in I} &\longrightarrow S \otimes_R DR \oplus \bigoplus_i S \Delta(S)(X_i) \\ p(X) = \sum_n r_n X^n &\longrightarrow \sum_n X^n \otimes \Delta(R)(r_n) + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial X_i} p \right) \Delta(S)(X_i) \end{aligned}$$

über.

Als Spezialfall erhält man für $R=K$ wegen $DK=0$

$$DK[X_i]_{i \in I} \cong \bigoplus K[X_i] \Delta(X_i) \text{ mit freien Erzeugenden } \Delta(X_i).$$

vi.) Entsprechend erhält man die Fortsetzung von Differentiationen auf Quotientenringe, die als Vertauschbarkeit der Funktoren $Quot(Quotientenring\text{-}bzw.\text{ modul})$ und D bewiesen wird nach

II, 8.5.

3.) Die äußere Algebra

i.) Zunächst wieder einige Bemerkungen über die Kategorien

$k\text{-gr-Alg}^0 K$ und $k\text{-gr-Alg } R, R$ eine kommutative K-Algebra.

$$\text{Eine Folge } (R, A) \xrightarrow{(\alpha, f)} (S, B) \xrightarrow{(\gamma, h)} (T, C) \text{ in } (k\text{-gr-Alg}^0 K)$$

$k\text{-gr-Alg } K$ ist genau dann exakt, wenn $R \xrightarrow[\beta]{\alpha} S \xrightarrow{\gamma} T$ exakt ist, wenn h surjektiv ist und wenn $\text{Ke } h$ das von $(\alpha-\beta)(R)B$ und $(f-g)(A)$ in B erzeugte homogene zweiseitige Ideal ist, d.h.

$$\text{Ke } h = ((\alpha-\beta)(R)B + (f-g)(A))_B$$

Die filtrierten direkten Limites in $k\text{-gr-Alg } K$ erhält man als die mengentheoretischen Limites mit der passenden algebraischen Struktur.

Sind $A = \bigoplus_{m \geq 0} A^m$ und $B = \bigoplus_{n \geq 0} B^n$ in $Ok\text{-gr-Alg } R$, so ist

$A \otimes B = \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{i+j=l} A^i \otimes B^j$ mit der Multiplikation

$(a_m \otimes b_n) \cdot (a'_m \otimes b'_n) := (-1)^{nm'} (a_m a'_m) \otimes (b_n b'_n)$ direkte Summe von A und B in $k\text{-gr-Alg } R$.

ii.) $E_R : \text{Mod } R \rightsquigarrow k\text{-gr-Alg } R$ ist rechtsexakt (II, 3.1).

iii.) E ist mit endlichen direkten Summen vertauschbar, d.h.

$E_R(M \oplus M') \cong E_R M \oplus E_R M'$ (II, 8.7).

iv.) E und E_R sind mit filtrierten direkten Limites vertauschbar (II, 8.7).

Da sowohl alle Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{F}}_R(\text{Mod } R)$ als auch alle Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{F}}_R(k\text{-gr-Alg } R)$ existieren, ist E_R nach II, 8.7 sogar mit allen Funktoren $\overrightarrow{\mathcal{F}}_R$ vertauschbar.

v.) Sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein K -Algebrenhomomorphismus. Dann ist das

Diagramm
$$\begin{array}{ccc} \text{Mod } R & \xrightarrow{E_R} & k\text{-gr-Alg } R \\ \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\ \text{Mod } S & \xrightarrow{E_S} & k\text{-gr-Alg } S \end{array}$$
 bis auf Isomorphie kommutativ. Dabei bezeichne φ^* den Funktor "Grundringerweiterung"

("inverses Bild") $S \otimes_R^* \cdot$. Es gilt also $E_S(S \otimes_R^* M) \cong S \otimes_R^* E_R M$ für jeden R -Modul M (II, 8.5).

vi.) Sind ${}_R M$ ein R -Modul, ${}_R E M = \bigoplus_{n \geq 0} (E M)^n$ und $e(M) : M \rightarrow E M$ der kanonische Morphismus, so sind $(E M)^0 = R 1_{E M}$ mit R -freiem 1-Element $1_{E M}$ und $(E M)^n = e(M)(M)^n$ für $n \geq 1$.

Das folgt unmittelbar daraus, daß $(E M, e(M))$ die universelle Faktorisierungseigenschaft hat.

vii.) Für alle R -Moduln M ist $e(M)_F : M \longrightarrow (EM)^1$ Isomorphismus. Jedenfalls ist $e(M)_F$ nach vi.) Epimorphismus.

Sei zunächst $M=R$. Wegen der Beziehungen $R \otimes_K K \cong R, K \otimes_Z Z \cong K$ und v.) können wir uns hierbei auf den Fall $R=K=Z$ beschränken. Dieser läßt sich wiederum auf den Fall $K=Z, R=Q$ (rationaler Zahlkörper) reduzieren, da die Abbildung $Z \longrightarrow Q \otimes_Z Z \cong Q$ injektiv ist. Da Q ein Körper ist, ist die Behauptung in diesem Fall aber trivial. Der Rest verläuft mechanisch. Auf Grund von iii.) gilt die Behauptung für endlich erzeugte freie R -Moduln, wegen iv.) gilt sie dann auch für beliebige freie R -Moduln und wegen ii.) sogar für alle R -Moduln, q.e.d..

viii.) Beispiel

Sei $M = \bigoplus_{i=1}^n R X_i$ ein endlich erzeugter freier R -Modul der Länge n .

Dann ist $EM \cong \underbrace{ER \oplus \dots \oplus ER}_{n\text{-mal}}$, woraus

$R(EM)^k = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} Re(M)(X_{i_1}) \dots e(M)(X_{i_k})$ mit R -linear unabhängigen $e(M)(X_{i_1}), \dots, e(M)(X_{i_k})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Insbesondere ist $(EM)^k = 0$ für $k > n$.

Man erhält so alle Ergebnisse von Chevalley [4] über äußere Algebren, ohne je die explizite Konstruktion der äußeren Algebra zu benötigen.

4.) Die Differentialalgebra

Ohne Einschränkung nehmen wir nach 1.) und 3.) $A=ED$ und für alle kommutativen K -Algebren R $(AR)^0 = R, (AR)^1 = DR, e(DR) = \text{Inj} : DR \longrightarrow AR$ und $\delta(R) = e(DR) \Delta(R) = \text{Inj} \cdot \Delta(R)$ an.

i.) A ist rechtsexakt (II, 3.1).

ii.) A ist mit filtrierten direkten Limites vertauschbar (II, 8.7)

iii.) Den Anschluß an die Theorie der Differentialalgebren

(s. E. Kunz [10]) erhält man durch folgende Behauptung:

Die K -Derivation $d^\circ := \Delta(R) : R = (AR)^0 \longrightarrow DR = (AR)^1$ läßt sich eindeutig zu einem K -Modulendomorphismus $d : AR \longrightarrow AR$ vom Grad 1

so fortsetzen, daß für alle $r, r_1, \dots, r_n$ aus R
 $d(r \cdot dr_1 \cdot \dots \cdot dr_n) = dr \cdot dr_1 \cdot \dots \cdot dr_n$ gilt. Dazu bemerken wir, daß die
 Elemente der Gestalt $dr, r \in R$, AR -als R -Algebra erzeugen, da $\delta(R)$
 Epimorphismus ist. Der Beweis verläuft wie folgt :

Die Behauptung ist trivial, wenn $R = K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynomring
 mit endlich vielen Unbestimmten (ein endliches freies Objekt)
 ist, auf Grund von 2.), v) und 3.), viii). Sie gilt daher wegen
 4.) ii) auch für beliebige Polynomringe über K . Berücksichtigt man
 nun, daß $K[X]$ erzeugendes Objekt von k -Alg K und daß A rechtsexakt
 sind, so folgt die Behauptung für alle kommutativen K -Algebren R .
 iv.) Weitere Eigenschaften von A folgen analog. Insbesondere
 ist für alle kommutativen K -Algebren R (AR, d) eine DGA- K -Algebra
 im Sinne von Mac Lane [11].

Literaturverzeichnis

- [1] N.Bourbaki:Éléments de Mathématique,Livre I,Chap.4; Hermann ,Paris 1957
- [2] D.Buchsbaum:Satellites and universal functors;Ann.of Math. 71(1960)
- [3] H.Cartan-S.Eilenberg:Homological Algebra;Princeton University Press 1956
- [4] C.Chevalley:Fundamental Concepts of Algebra;New York 1956
- [5] I.Fleischer:Sur le problème d'application universelle de N.Bourbaki;C.R.Acad.Sc. Paris 254 (1962),S.3161-3163
- [6] P.Gabriel:Des Catégories Abéliennes;Bull.Soc.Math.90,3 Paris 1961
- [7] A.Grothendieck:Sur quelques points d'algèbre homologique; Tohoku Math.J. 9(1957)
- [8] A.Heller:Homological Algebra in Abelian Categories; Ann.of Math. 68(1958)
- [9] D.M.Kan:Adjoint Functors;Trans.Am.Math.Soc. 68(1958)
- [10] E.Kunz:Arithmetische Anwendungen der Differentialalgebren; J.R.A.Math. 214/215
- [11] S.Mac Lane:Homology;Springer 1963
- [12] J.-M.Maranda:Injective Structures;Trans.Am.Math.Soc. 110(1964)
- [13] R.Rentschler:Einige Typen nicht-Abelscher Kategorien; Diplomarbeit,Heidelberg 1964
- [14] H.Röhrhl:Satelliten halbexakter Funktoren;Math.Z. 79(1962)
- [15] J.-E.Roos:Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$.Application. C.R.Acad.Sc.Paris 252(1961),S.3702-3704
- [16] J.Sonner:Universal and special problems;Math.Z. 82(1963)

Lebenslauf

Am 4. Oktober 1940 wurde ich als zweiter Sohn von vier Söhnen des Physikers Dr. Hermann Oberst und seiner Ehefrau Ruth, geb. Winchenbach, in Berlin geboren.

Meine Schulzeit verbrachte ich wegen des häufigen Wohnungswechsels meiner Eltern an zahlreichen Schulen und legte im Frühjahr 1959 an der Leibnizschule in Frankfurt-Höchst die Reifeprüfung ab.

Vom Sommersemester 1959 bis einschließlich Sommersemester 1963 studierte ich Mathematik und Physik an der Universität Heidelberg, wo ich im Juni 1963 die Diplomprüfung in Mathematik bestand. Nur das Wintersemester 1961/62 verbrachte ich als Hilfsassistent von Herrn Prof. Kasch an der Pennsylvania State University, Pennsylvania, U.S.A. In Heidelberg nahm ich an Vorlesungen und Seminaren der Herren Dold, Haxel, Jensen, Jörgens, Kasch, Kopfermann, Köthe, Krickeberg, Puppe, F.K. Schmidt, Seifert, Stech, Wessel u.a. teil.

Seit September 1963 verwalte ich am Mathematischen Institut der Universität München die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten.

München, den 8. August 1964

Ulrich Oberst

Xerografie- Druck

Chemoprint^{OHG}

Gießen